DEL PUEBLO DE LOS ESTADOS UNIDOS DE AMÉRICA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA

GOBIERNO DE EL SALVADOR

NOVENO GRADO

PROYECTO EDUCACIÓN PARA LA NIÑEZ Y JUVENTUD

Matemática

MATERIAL DE APOYO

9°

USAID
DEL PUEBLO DE LOS ESTADOS UNIDOS DE AMÉRICA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
GOBIERNO DE EL SALVADOR

NOVENO GRADO

PROYECTO EDUCACIÓN PARA LA NIÑEZ Y JUVENTUD

Matemática

MATERIAL DE APOYO

9°


USAID
DEL PUEBLO DE LOS ESTADOS UNIDOS DE AMÉRICA
GOBIERNO DE EL SALVADOR
NOVENO GRADO
PROYECTO EDUCACIÓN PARA LA NIÑEZ Y JUVENTUD
Matemática
MATERIAL DE APOYO
9°

ÍNDICE

UNIDAD 3. TÉCNICAS DE CONTEO

UNIDAD 4: RADICACIÓN

UNIDAD 5: ESTADÍSTICA. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

UNIDAD 6: ÁNGULOS

CARTA DE TITULARES

Estimado y estimada estudiante:

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología y la Dirección Nacional de Educación de Jóvenes y Adultos te damos la más cordial bienvenida a este proceso de formación y consideramos fundamental brindarte oportunidades educativas de Tercer Ciclo y/o Bachillerato, por medio de las ofertas educativas flexibles que promueven la formación y certificación de tus competencias por madurez, y mediante procesos académicos acelerados de nivelación académica, con metodologías semipresenciales y virtuales, fundamentados para que tu aprendizaje sea autónomo.

Para la implementación de estas estrategias educativas, la Dirección Nacional de Educación de Jóvenes y Adultos, con el apoyo del Gobierno de los Estados Unidos de América, mediante la Agencia de los Estados Unidos para el Desarrollo Internacional (USAID) a través del Proyecto de Educación para la Niñez y Juventud (ECYP), ha elaborado este material de apoyo que esperamos sea de total utilidad para lograr con éxito tus metas académicas, por medio de la **prueba de suficiencia o con tutoría para la nivelación académica.**

Ahora que inicias esta nueva aventura de aprender, tienes en tus manos este material de apoyo donde encontrarás la información básica para que puedas estudiar en casa y adquieras los conocimientos, habilidades y valores, que abran mejores oportunidades de vida.

Reiteramos que el camino para obtener grandes logros académicos es el esfuerzo, la disciplina y el trabajo constante. Por ello, te felicitamos por tomar la decisión de continuar tus estudios y te invitamos a dar lo mejor de ti para salir adelante.

Por nuestra parte, reafirmamos nuestro compromiso de ofrecerte servicios educativos de alta calidad que garanticen el derecho a la educación de todas las personas, especialmente las más vulnerables, para que alcancen los once años de escolaridad.

Te exhortamos a que realices el máximo esfuerzo por superarte académicamente y logres tus propósitos de vida. ¡Ánimo!, ¡sigue adelante!

Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación, Ciencia y Tecnología

SIGLAS

ÁGAPE, Asociación ÁGAPE de El Salvador.

AIS, Asociación Institución Salesiana.

DNEJA, Dirección Nacional de Educación de Jóvenes y Adultos.

ECYP, Proyecto Educación para la Niñez y Juventud (por sus siglas en inglés).

FEDISAL, Fundación para la Educación Integral Salvadoreña.

FHI 360, Family Health International.

FUNPRES, Fundación Pro Educación de El Salvador.

FUSALMO, Fundación Salvador del Mundo.

MINEDUCYT, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

PAES, Prueba de Aptitudes y Aprendizaje para Egresados de Educación Media.

UDB, Universidad Don Bosco.

USAID, Agencia de los Estados Unidos para el Desarrollo Internacional.

PRESENTACIÓN

El Proyecto Educación para la Niñez y Juventud (ECYP) surge bajo la iniciativa del Asocio para el Crecimiento y la Estrategia Global de Educación, por parte de la Agencia de los Estados Unidos para el Desarrollo Internacional (USAID) - El Salvador, como apoyo al Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) en la implementación del Plan Social Educativo 2009-2014: "Vamos a la Escuela" y, el posterior Plan Nacional de Educación en función de la Nación 2015-2019.

El proyecto tiene como propósito: "Mejorar las oportunidades educativas para estudiantes de tercer ciclo vulnerables/desventajados y jóvenes entre las edades de 9 a 24 años de edad que no están en la escuela, que viven en los municipios seleccionados con una tasa alta de crimen".[1]

Los principales socios del proyecto son el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, como socio gubernamental, la Fundación para la Educación Integral Salvadoreña (FEDISAL), socio implementador líder, junto a la red de instituciones socias: Family Health International (FHI 360), Asociación Institución Salesiana (AIS), Fundación Salvador del Mundo (FUSALMO), Universidad Don Bosco (UDB), Fundación Pro Educación de El Salvador (FUNPRES) y la Asociación ÁGAPE de El Salvador.

Como parte de la implementación del proyecto, se busca:[2]

1. Mejorar sosteniblemente los resultados educativos para estudiantes de segundo y tercer ciclo.
2. Aumentar el acceso a oportunidades educativas para jóvenes no escolarizados.
3. Adquirir y efectuar la distribución de útiles escolares a escuelas dañadas por el Huracán IDA.
4. Apoyar con un fondo de respuesta rápida (para emergencias por fenómenos naturales), en caso de requerirse.

1. FEDISAL y Red de Socios. Proyecto educación para la Niñez y Juventud. Plan de Trabajo Anual 2015. Pág. 3
2. Ibídem, págs. 15-18

La implementación del proyecto inició en el año 2013; con la atención a una población de niños y adolescentes de las edades y características consideradas por el proyecto, principalmente de aquellos que enfrentan situaciones de violencia, sobre edad escolar, vulnerabilidad, embarazo temprano, dificultades económicas, de acceso educativo y laboral y/o productivo.

Para dar respuesta a las dificultades señaladas, en el marco del Objetivo 2 del proyecto, se creó el Programa de Formación Integral, que es un programa complementario a la oferta educativa de Modalidades Flexibles que brinda el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

El programa incluye servicios integrales que potencian los esfuerzos gubernamentales y locales por brindar oportunidades educativas a la población que se encuentra fuera del sistema educativo regular. Específicamente, ejecuta actividades orientadas a aumentar el retorno, la permanencia y el éxito escolar de niños y jóvenes que se encuentran fuera del sistema escolar, para que logren culminar sus estudios y obtener los grados académicos del sistema educativo; ya sea, desde la oferta académica de Modalidades Flexibles de Educación o desde la escuela regular.

En el marco del trabajo anterior, el proyecto busca apoyar acciones concretas a la estrategia de atención a niños y jóvenes que quieren retomar sus estudios y obtener su certificación de grado a través del servicio de Prueba de Suficiencia. El esfuerzo, ha logrado el diseño de 15 módulos para Tercer ciclo y 10 para Bachillerato; haciendo un total de 25 documentos de apoyo para la formación autónoma y el logro de indicadores de aprendizaje de los programas de estudio.

GENERALIDADES

OBJETIVO

Brindar a la población estudiantil de Modalidades Flexibles de Educación, de Tercer Ciclo de Educación Básica, un documento de apoyo académico, que sirva de material de estudio autónomo, para someterse a la Prueba de Suficiencia.

LINEAMIENTOS

El material de apoyo presentado ha sido concebido bajo la iniciativa de beneficiar a la población estudiantil de Modalidades Flexibles de Educación, que aplica a la Prueba de Suficiencia. El documento está orientado al trabajo autónomo por parte del estudiante; mediante una adaptación de la propuesta metodológica: Aprendo, Practico, Aplico (APA), que fue desarrollada exitosamente por el profesor colombiano, Óscar Mogollón, en su propuesta de la Escuela Nueva y Escuela Activa de Colombia en la década de los años 70.

El diseño de cada documento de estudio, se fundamenta en la priorización de indicadores de logro de los programas de estudio vigentes, realizada por la Dirección Nacional de Educación de Jóvenes y Adultos (DNEJA), dependencia que orienta los procesos educativos relacionados con Modalidades Flexibles y la relación existente entre los mismos; determinando así, las unidades y lecciones de cada módulo.

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

El material de apoyo está integrado por unidades de aprendizaje y lecciones. Las unidades responden a una conjunción de indicadores de logro y objetivos de los programas de estudio de tercer ciclo, que derivan en lecciones. Cada lección facilita el desarrollo de uno o dos indicadores de logro; mediante el proceso Aprendo, Practico, Aplico.

Según la metodología APA, el estudiante es el protagonista de su aprendizaje; por ello, en las lecciones, la redacción de las acciones se presenta en primera persona (yo), tiempo presente (yo aprendo, yo practico, yo aplico); indicando lo que el estudiante realiza en ese momento: leo, escucho, mido, organizo…

A continuación, se explica qué contiene cada sección:

Sección Aprendo: Está constituida por saberes previos y conocimientos básicos; es decir, se presenta una interrogante al respecto del tema, al nivel que el estudiante debe conocer inicialmente. Posteriormente, se presenta la información teórica respecto al tema, según el indicador de logro y se desarrollan ejemplos.

Sección Practico: En ella se dejan ejercicios que el estudiante deberá resolver para ejercitar la teoría recordada, estudiada y ejemplificada en la sección anterior.

Sección Aplico: Orienta al estudiante para que emplee en su medio inmediato, los conocimientos adquiridos y ejercitados en las secciones anteriores. En esta sección se solicita al estudiante interactuar con su familia, comunidad, compañeros de labores, entre otros, para dar a conocer su nuevo aprendizaje, en el medio real en el que se desenvuelve. Es una sección donde el estudiante da cuenta de cómo los conocimientos teóricos tienen aplicación en la vida diaria.

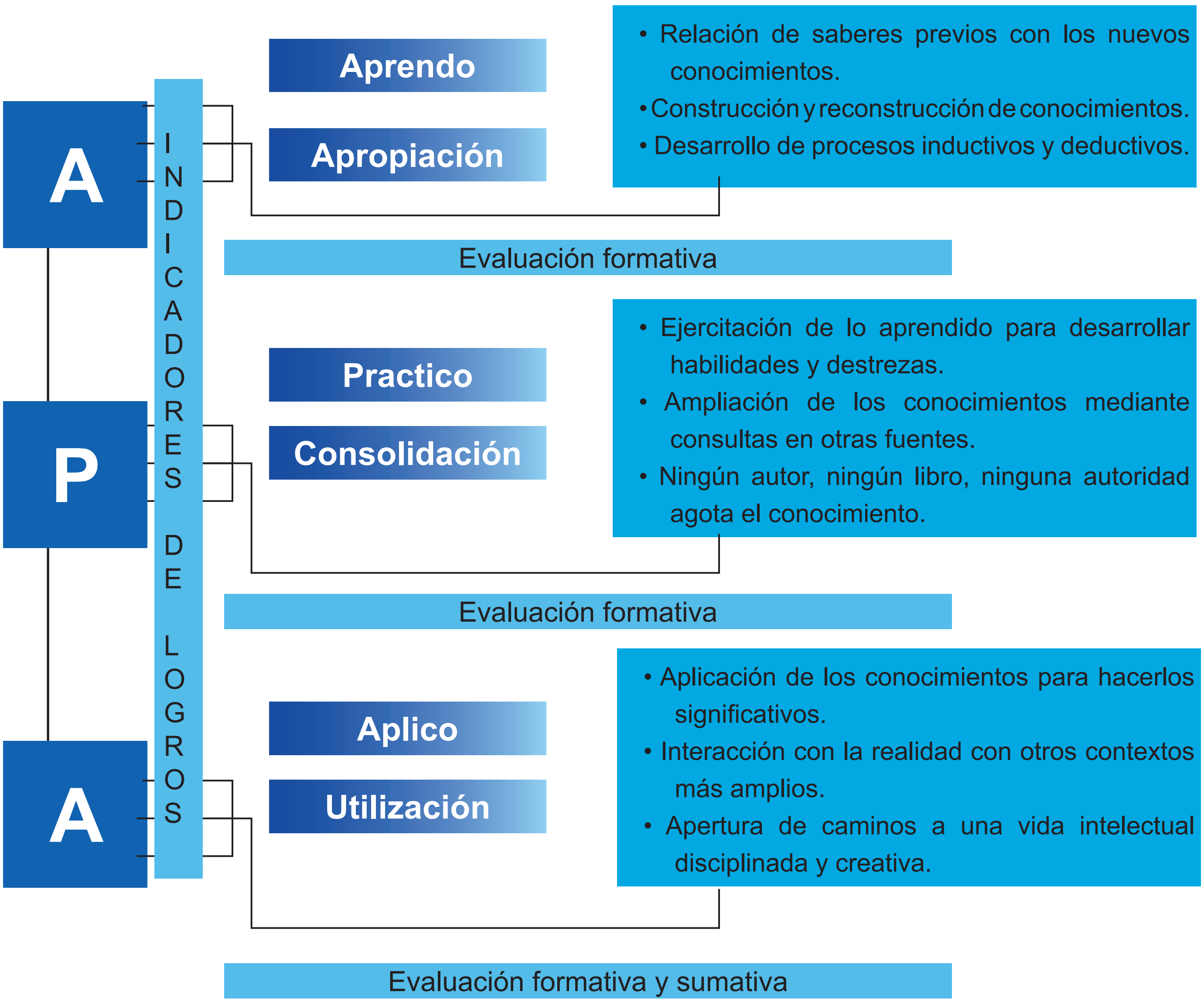
En las secciones Aprendo, Practico y Aplico, se presenta una evaluación formativa; es decir, una reflexión del aprendizaje, expresado en preguntas, que orientan al estudiante a reflexionar autónomamente sobre su proceso de adquisición de conocimientos, práctica y aplicación de los mismos. Al finalizar cada lección, se presenta un máximo de tres preguntas con opción de respuesta de selección múltiple, del tipo de preguntas de la Prueba de Aptitudes y Aprendizaje para Egresados de Educación Media (PAES); a fin de que el estudiante tenga contacto con este tipo de ejercicio y se familiarice con la modalidad de la PAES.

Las secciones están identificadas por iconos, que han sido diseñados según la naturaleza de las actividades que se desarrollan en cada una:

SECCIÓN	ICONO	ACTIVIDAD
APRENDO		Adquisición de teoría y ejemplificación.
PRACTICO		Resolución de ejercicios.
APLICO		Empleo de conocimientos en la comunidad o contexto inmediato.
AUTOEVALUACIÓN		Reflexión del nivel de aprendizaje adquirido en cada lección

Al finalizar cada unidad, se ha ubicado la bibliografía correspondiente.

La estructura de las lecciones se describe a continuación:



MATEMÁTICA
NOVENO GRADO

OBJETIVOS DE GRADO

- Valorar la precisión del cálculo matemático en propuestas de solución que requiera la determinación de áreas de sectores circulares.
- Tomar decisiones acertadas en su diario vivir, al analizar críticamente las posibilidades de ocurrencia de un suceso.
- Proponer soluciones a problemas de su realidad, al interpretar la información obtenida, aplicando con seguridad las medidas de dispersión.
- Resolver situaciones problemáticas de su entorno escolar y social, utilizando sistemas de ecuaciones.

UNIDAD 1: ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

OBJETIVO

- Utilizar con seguridad los determinantes y las ecuaciones con radicales, aplicando sus propiedades en la propuesta de soluciones a situaciones problemáticas del aula y del entorno.

LECCIÓN 1.1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON RADICALES.

INDICADOR DE LOGRO:

Aplica con interés las reglas de los exponentes al resolver ecuaciones con radicales.

SABERES PREVIOS:
Para encontrar el precio de una libra de frijoles me plantean la siguiente ecuación: $5x + 2 = 6$.

- ¿Qué clase de ecuación es?
- ¿Recuerdo las reglas de transposición de términos?
- ¿Recuerdo los productos notables $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$?

Recuperado de: https://goo.gl/NzCSHU

APRENDO

Muchos problemas de la vida diaria se pueden resolver utilizando ecuaciones, por ejemplo las siguientes:

$(I=(\$300)(0.06)(2))$ Esta ecuación me sirve para calcular el interés simple que me cobran por un préstamo o en la cuota de un electrodoméstico, los intereses ganados en el banco, etc. En este caso, la incógnita es el interés (I) y su exponente es uno.

$V=\dfrac{75 \text{ km}}{2 \text{ h}}$ Esta ecuación la puedo utilizar para calcular la velocidad de un objeto, si conozco la distancia recorrida y el tiempo que se tardó en recorrer esa distancia. La incógnita es la velocidad (V) y su exponente es uno.

En las ecuaciones que solo aparece una letra, a la que llamo "incógnita" y que su exponente es uno, les llamo "ecuaciones de primer grado con una incógnita".

Resuelvo la ecuación $x + 3 = 5$

Para resolver esta ecuación, debo encontrar el valor que hace cierta la igualdad; es decir, buscar el valor que debe tomar la incógnita. En este caso fácilmente deduzco que es 2, para que la igualdad se cumpla. Pero si una ecuación contiene un radical, el procedimiento cambia.

Ejemplo 1: Si tengo un terreno cuadrado, y cada lado mide $\sqrt{x}=3$, y deseo saber cuánto mide el área del terreno, entonces:

Recuerdo que el área de un cuadrado es lado por lado o lado al cuadrado:

Paso 1: Elevo al cuadrado a ambos lados → $(\sqrt{x})^2 = (3)^2$
Paso 2: Aplico las propiedades de potencias → $x = 9$

Ejemplo 2: Resuelvo la siguiente ecuación $\sqrt{x} + 2 = 8$

Paso 1: Aplico las reglas de transposición → $\sqrt{x} = 8 - 2$
Paso 2: Reduzco los términos → $\sqrt{x}=6$
Paso 3: Elevo ambos lados al cuadrado → $(\sqrt{x})^2=(6)^2$
Paso 4: Aplico las propiedades de las potencias → $x = 36$

Ejemplo 3: Resuelvo la siguiente ecuación $\sqrt{x + 2} = 8$

Paso 1. Elevo al cuadrado a ambos lados → $(\sqrt{x + 2})^2 = (8)^2$
Paso 2. Aplico propiedades de potencias → $x+2=64$
Paso 3. Aplico las reglas de transposición: → $x=64-2$
Paso 4. Aplico reducción de términos: → $x=62$

Ejemplo 4: Tengo una piscina que tiene de largo $\sqrt{x}$ y de ancho 3 metros, para saber cuál es el valor de "x", sabiendo que el área es de 12 metros cuadrados, entonces resuelvo la siguiente ecuación $3\sqrt{x}=12$

Paso 1. Aplico las reglas de transposición →	$\frac{3\sqrt{x}}{3} = \frac{12}{3}$
Paso 2. Reduzco términos →	$\sqrt{x} = 4$
Paso 3. Elevo al cuadrado a ambos lados →	$(\sqrt{x})^2=(4)^2$
Paso 4. Aplico las propiedades de las potencia →	$x = 16$

Ejemplo 5: Resuelvo la siguiente ecuación $\frac{\sqrt{x}}{5} = 2$

Paso 1. Aplico las reglas de transposición →	$\frac{5\sqrt{x}}{5} = 5 \cdot 2$
Paso 2. Reduzco términos →	$\sqrt{x} = 10$
Paso 3. Elevo al cuadrado a ambos lados →	$(\sqrt{x})^2 = (10)^2$
Paso 4. Aplico las propiedades de las potencias →	$x = 100$

Verifico mi aprendizaje

Marco X en SÍ o NO, dependiendo de lo aprendido.

CRITERIO	SÍ	NO
Identifico una ecuación de primer grado.		
Utilizo correctamente las reglas de transposición de términos		
Aplico correctamente la potenciación		
Estoy listo para continuar		

Antes de continuar, debo recordar cómo calcular los productos notables $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$

La expresión algebraica $(a+b)^2$ es igual al cuadrado de la primera cantidad más el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad. Es decir: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

También, tengo la expresión $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Para resolver ejercicios de este tipo, aplico el siguiente procedimiento:

$$(3m + 5)^2 = (3m)^2 + 2(3m)(5) + (5)^2$$

$$(3m + 5)^2 = 9m^2 + 30m + 25$$

Si tengo una expresión como ($\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, el procedimiento sería similar; pero teniendo en cuenta las propiedades de las potencias y los radicales.

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$$

Y si la expresión que tengo es ($\sqrt{(3x+7)}$ $+\sqrt{(5x-9)})^2$, al igual que ejemplo anterior, el procedimiento solo me exige tener cuidado en la aplicación de las propiedades.

$$\left(\sqrt{(3x+7)}+\sqrt{(5x-9)}\right)^2=\left(\sqrt{(3x+7)}\right)^2+2\cdot\sqrt{(3x+7)}\cdot\sqrt{(5x-9)}+\left(\sqrt{(5x-9)}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{(3x+7)}+\sqrt{(5x-9)}\right)^2=\left(\sqrt{(3x+7)}\right)^2+2\cdot\sqrt{(3x+7)}\cdot\sqrt{(5x-9)}+\left(\sqrt{(5x-9)}\right)^2$$
$$\left(\sqrt{(3x+7)}+\sqrt{(5x-9)}\right)^2=3x+7+2\sqrt{(3x+7)\cdot(5x-9)}+5x-9$$
$$\left(\sqrt{(3x+7)}+\sqrt{(5x-9)}\right)^2=2\sqrt{(3x+7)(5x-9)}+3x+5x+7-9$$
$$\left(\sqrt{(3x+7)}+\sqrt{(5x-9)}\right)^2=2\sqrt{(3x+7)(5x-9)}+8x-2$$
$$\left(\sqrt{(3x+7)}+\sqrt{(5x-9)}\right)^2=2\sqrt{15x^2-27x+35x-63}+8x-2$$
$$\boxed{\left(\sqrt{(3x+7)}+\sqrt{(5x-9)}\right)^2=2\sqrt{15x^2+8x-63}+8x-2}$$

Con los ejemplos anteriores, puedo ahora proceder a resolver ecuaciones que contengan dos expresiones con raíces cuadradas, por ejemplo: $\sqrt{x+9}$ - $\sqrt{x}$ = 1

Presento la solución siguiendo el paso a paso para lograr asimilar el proceso de manera bien ordenada

Procedimiento 1:	Procedimiento 2:
$\sqrt{x+9}-\sqrt{x}=1$	$\sqrt{x+9}-\sqrt{x}=1$
$\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right)^2=(1)^2$	$\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+1$
$\left(\sqrt{x+9}\right)^2-2\cdot\sqrt{x+9}\cdot\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2=1$	$\left(\sqrt{x+9}\right)^2=\left(\sqrt{x}+1\right)^2$
$x+9-2\sqrt{x(x+9)}+x=1$	$x+9=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot(1)+(1)^2$
$-2\sqrt{x(x+9)}=1-x-x-9$	$x+9=x+2\sqrt{x}+1$
$-2\sqrt{x(x+9)}=-2x-8$	$x+9-x-1=2\sqrt{x}$
Multiplicando por -1, ambos miembros,	
$2\sqrt{x^2+9x}=2(x+4)$	$8=2\sqrt{x}$
Dividiendo entre 2, ambos miembros,	
$\sqrt{x^2+9x}=(x+4)$	$2\sqrt{x}=8$
$\left(\sqrt{x^2+9x}\right)^2=(x+4)^2$	$\sqrt{x}=\frac{8}{2}$
$x^2+9x=x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2$	$\sqrt{x}=4$
$x^2+9x=x^2+8x+16$	$\left(\sqrt{x}\right)^2=(4)^2$
$x^2+9x-x^2-8x=16$	
$x=16$	$x=16$

PRACTICO

Encuentro la solución para las siguientes ecuaciones, siguiendo el paso a paso de forma ordenada:

1. $\sqrt{x} = 9$
2. $\sqrt{x} - 8 = 12$
3. $\sqrt{x}+9 = 10$
4. $\sqrt{3x+1} = 4$
5. $\sqrt{2x} + 3 = 15$
6. $\sqrt{4x} + \sqrt{x} = 5$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{x}-5 = 7$
8. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+15} = 8$

Resuelvo el siguiente problema: Quiero construir una pileta para criar tilapias, cuento con un terreno rectangular; cuyo perímetro es igual a 14 metros, el largo está calculado como $\sqrt{x+7}$, y el ancho $\sqrt{x}$. ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho respectivamente?

Evalúo mi aprendizaje

¿Por qué es importante dominar la transposición de términos en la resolución de las ecuaciones?

APLICO

En mi cuaderno realizo lo siguiente:

Debo expresar el perímetro de una ventana, del contorno de la puerta de mi casa, utilizando una ecuación con radicales y explicarle a un amigo de mi comunidad cómo es el procedimiento de resolución.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. La solución de la ecuación $\sqrt{x}-1=10$ es:							
A	$x = 9$	B	$x = 16$	C	$x = 101$	D	$x = 121$
2. La solución de la ecuación $\sqrt{x-1}=10$ es:							
A	$x = 9$	B	$x = 16$	C	$x = 101$	D	$x = 121$

Respuesta: 1D; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $x=81$
2) $x=400$
3) $x=1$
4) $x=5$
5) $x=72$
6) $x=\frac{25}{9}$
7) $x=14.9$
8) $x=10$

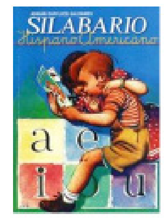
Problema:
Largo = 4 metros
A ncho= 3 metros

LECCIÓN 1.2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON RADICALES.

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve ejercicios y problemas utilizando las ecuaciones con radicales transformables en ecuaciones de primer grado.

SABERES PREVIOS:
¿Cuál es el área de la portada del libro, si su base es (x-5) y su altura es (x+2)?



(x+2)

(x-5)

Recuperado de:
https://goo.gl/YoEnnR

- ¿Qué son los productos notables?
- ¿Cuáles productos notables recuerdo?

APRENDO

La importancia de que pueda aplicar correctamente el desarrollo de los productos notables, me permite simplificar muchos procedimientos que podrían ser largos y tediosos.

Si tengo el área del siguiente cuadrado y debo resolver dicha expresión, entonces mi resultado es: $a + 2\sqrt{ab} + b$.

$$A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Puedo observar que la respuesta está formada por tres términos, los dos extremos son los valores que aparecen dentro de los radicales originales y el del centro es la multiplicación de esas cantidades, dentro de la raíz multiplicada por dos. Que también se puede escribir como $a+b+2\sqrt{ab}$, dejando el término con radical al final. Apreciar estos detalles me permite desarrollar de manera rápida, expresiones que tengan la misma estructura. Ejemplos:

b). $(\sqrt{3m} + \sqrt{5n})^2$ de manera rápida el desarrollo es: $3m + 5n + 2\sqrt{15mn}$
a). $(\sqrt{7b} + \sqrt{4})^2$ de manera rápida el desarrollo es: $7b + 4 + 2\sqrt{28b}$

Si la expresión del producto notable no es una suma sino una diferencia, el único cambio es que el doble producto será negativo. Ejemplos:

c) $(\sqrt{x}-\sqrt{7})^2$ de manera rápida el desarrollo es: $x+7-2\sqrt{7x}$
d) $(\sqrt{3m}-\sqrt{5n})^2$ de manera rápida el desarrollo es: $3m+5n-2\sqrt{15mn}$

Otro producto notable que me facilita reducir procedimiento, es (x+a)(x+b), cuyo desarrollo es $x^2+(a+b)x+ab$. Y aunque parezca difícil, en la práctica es muy fácil. Ejemplos:

a) $(x+3)(x+9)=x^2+(3+9)x+(3)(9)=x^2+12x+27$
b) $(x+3)(x-9)=x^2-6x-27$
c) $(x-3)(x+9)=x^2+6x-27$
d) $(x+3)(x-9)=x^2-12x+27$

Aplicado en una cantidad sub-radical: $\sqrt{(x+3)(x+9)}=\sqrt{x^2+12x+27}$

Con el aprendizaje de estos procedimientos, ya puedo resolver una ecuación con radicales de manera más sencilla.

Ejemplo 1: Resuelvo la ecuación $2\sqrt{2x+1}-10=0$

Resolver:	$2\sqrt{2x+1}-10=0$
Paso 1: Paso el término independiente al otro lado de la ecuación:	$2\sqrt{2x+1}=10$
Paso 2: Divido entre dos a ambos lados:	$\sqrt{2x+1}=5$
Paso 3: Elevo al cuadrado a ambos lados:	$2x+1=25$
Paso 4: Despejo “x”:	$2x=25-1$ $2x=24$ $x=\frac{24}{2}$ $x=12$
Respuesta:	$x=12$

Ejemplo 2: Resuelvo la ecuación $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+15}=8$

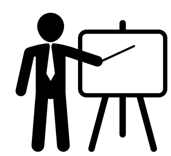
Resolver:	$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+15}=8$
Paso 1: Elevo al cuadrado a ambos lados:	$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+15}\right)^2=(8)^2$
Paso 2; Aplico el desarrollo del producto:	$2x+14+2\sqrt{(x-1)(x+15)}=64$
Paso 3: Despejo el radical:	$2\sqrt{(x-1)(x+15)}=64-14-2x$
Paso 4: Reduzco términos semejantes:	$2\sqrt{(x-1)(x+15)}=50-2x$
Paso 5: Divido entre dos a ambos lados:	$\sqrt{(x-1)(x+15)}=25-x$
Paso 6: Elevo al cuadrado a ambos lados:	$(x-1)(x+15)=(25-x)^2$

Paso 7: Desarrollo los productos notables:	$x^2 + 14x - 15 = x^2 - 48x + 625$
Paso 8: Elimino los términos cuadrados:	$14x - 15 = -48x + 625$
Paso 9: Ordeno ambos miembros:	$14x + 48x = 625 + 15$
Paso 10: Reduzco término semejantes:	$64x = 640$
Paso 11: Despejando "x":	$x = \frac{640}{64}$
Respuesta:	$x = 10$

Ahora voy a comprobar si mi respuesta es correcta, al hacer la sustitución del valor de "x = 10" en la ecuación original: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+15} = 8$

Comprobación:	$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+15} = 8$
Sustituyo "x=10" en la ecuación:	$\sqrt{(10) - 1} + \sqrt{(10) + 15} = 8$
Elimino los paréntesis:	$\sqrt{10 - 1} + \sqrt{10 + 15} = 8$
Reduzco las cantidades subradicales:	$\sqrt{9} + \sqrt{25} = 8$
Calculo los valores de las raíces:	$3 + 5 = 8$
Hago la suma:	$8 = 8$

Ejemplo 3. El perímetro de una pizarra está dado por la ecuación $\sqrt{5x - 10} - \sqrt{2x + 19} = 0$. Encuentro el valor de "x"

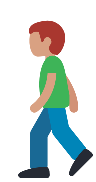


Recuperado de: https://goo.gl/vYfTGs

Resolver:	$\sqrt{5x + 10} - \sqrt{2x + 19} = 0$
Paso 1: Paso el radical negativo al otro lado de la ecuación:	$\sqrt{5x + 10} = \sqrt{2x + 19}$
Paso 2: Elevo al cuadrado a ambos lados:	$5x + 10 = 2x + 19$
Paso 3: Despejo "x":	$5x - 2x = 19 - 10$ $3x = 9$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$
Respuesta:	$x = 3$

Ejemplo 4. El número de kilómetros recorridos por una persona de su casa al trabajo y viceversa, se expresa con la ecuación:

$\sqrt{x} + \sqrt{x + 7} = 7$. Calcular el valor de "x".



Resolver:	$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=7$
Paso 1: Elevo al cuadrado a ambos lados:	$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+7}\right)^2=7^2$
Paso 2: Desarrollo el producto notable	$x+x+7+2\sqrt{x(x+7)}=49$
Paso 3: Reduzco términos semejantes y realizo transposición de términos:	$2\sqrt{x(x+7)}=42-2x$
Paso 4: Elevo al cuadrado a ambos lados:	$\left(2\sqrt{x(x+7)}\right)^2=(42-2x)^2$
Paso 5: Desarrollo el producto notable:	$4x(x+7)=1764+4x^2-2(42)(2x)$
Paso 6: Multiplico	$4x^2+28x=1764+4x^2-168x$
Paso 7: Despejo “x”	$4x^2-4x^2+28x+168x=1764$ $196x=1764$ $x=\frac{1764}{196}$ $x=9$
Respuesta:	$\boldsymbol{x=9}$

Evalúo mi aprendizaje

Marco X en SÍ o NO, dependiendo de lo aprendido.

CRITERIO	SÍ	NO
Aplico con seguridad los productos notables para resolver radicales.		
He aprendido a reducir pasos para reducir procedimientos.		
Me siento satisfecho cuando encuentro la solución de la ecuación.		

PRACTICO

1

Encuentro la solución para las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+34}+\sqrt{x-11}=9$

b) $\sqrt{x+25}-\sqrt{x-56}=3$

2

Resuelvo los siguientes problemas:

a) La ecuación $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$ expresa el número de cajas de fósforos que se gastan a diario en un comedor. Calculo el valor de “x”.

b) El tiempo en horas que se tarda un mecánico en darle mantenimiento a un carro, está expresado mediante la ecuación $\sqrt{x + 8} + \sqrt{x + 3} = 5$. Calculo el valor de “x”.

APLICO

Investigo en mi comunidad el perímetro de la cancha de futbol. Escribo en mi cuaderno de apuntes, tanto el largo como el ancho en forma de ecuación con radicales. Desarrollo en mi cuaderno la solución de la misma y la comparto con un amigo, explicándole mi procedimiento para resolverla.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El desarrollo correcto de la expresión $\sqrt{(x - 4)(x + 3)}$ es:

A	B	C	D
$\sqrt{x^2 + 7x + 12}$	$\sqrt{x^2 - x - 12}$	$\sqrt{x^2 - 7x - 12}$	$\sqrt{x^2 - 7x + 12}$

2. ¿Cuál es el valor de “x” que hace cierta la siguiente ecuación?

$$\sqrt{7x + 2} + \sqrt{5x - 1} = 7$$

A	B	C	D
$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

Respuesta: 1B; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

a) x=15
b) x=200

Problemas:
a) x=4 cajas de fósforos
b) x=1 hora

LECCIÓN 1.3. ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS.

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve ecuaciones cuadráticas incompletas, puras y mixtas, trabajando con orden y limpieza.

SABERES PREVIOS:

Recuperado de: https://goo.gl/z9aEKr

$x^2 - 2x$

Recuperado de: https://goo.gl/xGtFNK

$-x^2 + 3x + 4$

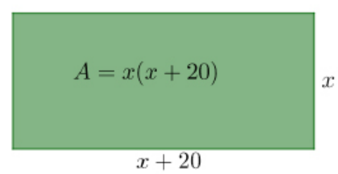
Recuperado de: https://goo.gl/5oV8Gt

$(x + 2)(x - 5)$

- ¿Recuerdo cómo se calcula el cuadrado de un número?
- ¿Recuerdo cómo se factora la diferencia de cuadrados?

APRENDO

La medida del largo de una pizarra es 20 cm más que el ancho. Si x es la medida del ancho del rectángulo, ¿cuál es la expresión matemática que determina el área del rectángulo?



El área es la base por la altura, entonces: $A = x(x+20)$.

Si multiplico, la expresión del área es: $A = x^2 + 20x$

Le llamo ecuación cuadrática a toda ecuación, cuya incógnita tiene como máximo exponente dos.

Estas ecuaciones tienen una particularidad especial, y es que pueden tener dos valores diferentes como solución. A veces solo tienen un valor y, en algunos casos, no existe un número como solución dentro del conjunto de números reales.

Algunos ejemplos de ecuaciones cuadráticas son: $x^2 + 4 = 10$; $2x^2 - 8x = 0$; $5x^2 - 3x + 9 = 0$; etc.
Ejemplo 1: Encuentro la solución de la ecuación $x^2 = 25$.

Lo primero que debo hacer es comprender la interpretación de esa ecuación:

1. "¿Cuál el número que al multiplicarlo por sí mismo da como resultado 25", lo que me hace pensar rápidamente que la respuesta correcta a esa pregunta es 5, ya que **$5×5=(5)^2=25$.**
2. Pero me queda una duda. Aunque estoy seguro de esa respuesta, ¿Existe otro número diferente de 5, que haga cierta la igualdad?. Después de pensar un rato, podría concluir que no hay otro; sin embargo, observo este detalle: $(-5) × (-5)=(-5)^2 = 25$
3. Por tanto, he encontrado dos respuestas para esa ecuación: " 5 " y "– 5 "

Pero no puedo calcular solo por tanteo, debo aplicar un procedimiento que me permita dejar evidencia de mis cálculos y que no deje duda de mi o mis respuestas si las hay.

Lo primero que debo hacer es aprender a clasificar el tipo de ecuación cuadrática ante la que me encuentro, eso me permite decidir cuál camino o procedimiento me puede ser de mayor utilidad o facilidad.

Una ecuación cuadrática se llama "completa" cuando posee tres términos y, estos igualados a cero y la represento por $ax^2 + bx + c = 0$, donde los valores de "a" y "b" son los coeficientes de la incógnita, y "c" es un número constante; es decir que no lleva incógnita.

Si el valor de "b" es cero, entonces la expresión quedaría así: $ax^2 + c = 0$, y son llamadas "ecuaciones cuadráticas incompletas puras" y el procedimiento que utilizo para despejar "x" es sencillo:

Ejemplo 2: Resuelvo $x^2 - 9 = 0$

Resolver:	$x^2 - 9 = 0$
Paso 1: Despejo "x^2":	$x^2 = 9$
Paso 2: Aplico raíz cuadrada a ambos lados:	$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$
Paso 3: Aplico la propiedad del valor absoluto $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\lvert x \rvert = \sqrt{9}$
Paso 4: Calculo la raíz cuadrada:	$\lvert x \rvert = 3$
Paso 5: Como $\lvert -3 \rvert=3$ y $\lvert 3 \rvert=3$, entonces x tiene dos valores:	$x= \pm 3$ R/

La expresión $x=\pm3$, la debo interpretar como dos respuestas diferentes: "– 3" y "+3".

En la práctica, el procedimiento anterior es más corto:

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ Despejo "x2"

$x = \pm\sqrt{9}$ Aplico transposición del cuadrado como $\pm\sqrt{\square}$

$x = \pm 3$ Calculo la raíz cuadrada y listo, ya tengo la solución.

Si le cambio el signo a -9 por +9, entonces tengo una ecuación cuadrática incompleta pura diferente a la primera, aunque a simple vista me parecen iguales.

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$ Despejo "x^2"

$x = \pm\sqrt{-9}$ Aplico transposición del cuadrado como $\pm\sqrt{\square}$

$x = ???$ Pero aquí sucede que la $\sqrt{-9}$ no es un número real; ya que no existe ningún número que multiplicado por sí mismo dé como respuesta un negativo,

Este es un ejemplo de una ecuación cuadrática que no tiene solución en el conjunto de números reales.

En general, a simple vista puedo concluir si una ecuación cuadrática incompleta pura tiene o no solución en los reales, y la clave está en que los coeficientes "a" y "c" deben tener signos diferentes y, de ser así, las soluciones son opuestas entre sí, una positiva y la otra negativa, si los signos son iguales entonces la ecuación no tiene solución en los reales.

Existe otra manera de resolver estas ecuaciones; pero debo manejar la técnica de factorización para la diferencia de cuadrados y, también que si dos números multiplicados dan como resultado cero, uno de los números o ambos son ceros.

Ejemplo 3: Resuelvo por factorización $x^2 - 9 = 0$

Resolver por factorización:	$x^2 - 9 = 0$
Paso 1: Aplico factorización para diferencia de cuadrados:	$(x+3)(x-3) = 0$
Paso 2: Tengo dos factores, debo igualarlos cada uno a cero	$x + 3 = 0$ $x - 3 = 0$
Paso 3: Despejo en ambas "x"	$x = -3$ $x = 3$

Cuando el valor de “c” es igual a cero, entonces obtengo la expresión $ax^2 + bx = 0$, y a este tipo de ecuación le llamo “ecuación cuadrática incompleta mixta”.

Para poder encontrar la solución a este tipo de ecuaciones, debo aplicar una técnica de factorización; ya que la técnica de despeje en este caso complica el cálculo.

Ejemplo 4: Resuelvo por factorización: $5x^2 - 6x = 0$

Resolver por factorización:	$5x^2 - 6x = 0$
Paso 1 Aplico factor común:	$x(5x-6) = 0$
Paso 2 Tengo dos factores, debo igualarlos cada uno a cero	$x=0$ $\quad$ $5x-6=0$
Paso 3 Despejo en ambas “x”	$x = 0$ $\quad$ $x = \frac{6}{5}$

En general, en este tipo de ecuación, una de las soluciones es siempre “cero”.

Ejemplo 5: Resuelvo por factorización la ecuación: $4x^2 - 100 = 0$

$$4x^2 - 100 = 0$$

$$4(x^2 - 25) = 0$$

$$4(x+5)(x-5) - 100 = 0$$

$$x+5=0 \qquad x-5=0$$

$$\mathbf{x=-5} \qquad \mathbf{x=5}$$

Ejemplo 6: Resuelvo por factorización la ecuación: $6x^2 + 32 = 0$.

Esta ecuación **no tiene** solución en los reales por tener signos iguales.

Ejemplo 7: Resuelvo por factorización la ecuación: $8x^2 - 20x = 0$.

$$8x^2 - 20x = 0$$

$$4x(2x - 5) = 0$$

$$x=0 \qquad 2x-5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Evalúo mi aprendizaje

Marco X en SÍ o NO, dependiendo de lo aprendido.

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido a clasificar las ecuaciones cuadráticas incompletas.		
He aprendido a resolver por despeje las incompletas puras.		
He aprendido a resolver por factorización las incompletas puras.		
He aprendido a resolver por factorización las incompletas mixtas.		

PRACTICO

Clasifico y resuelvo las siguientes ecuaciones en forma ordenada siguiendo el paso a paso:

1. $x^2 - 121 = 0$

2. $7x^2 + 9x = 0$

3. $16x^2 - 25 = 0$

4. $x^2 - 3x = 0$

5. $5x^2 = 10x$

APLICO

Realizo una investigación en mi comunidad, para ver si hay un taller de estructuras metálicas. Cotizo el precio de una puerta balcón con las medidas “x” de largo y 2 metros de largo, más un balcón de una ventana cuadrada de “x” metros de longitud. Debo escribir la ecuación de manera que el área de la puerta balcón sea igual al área de la ventana, la clasifico y luego la resuelvo, busco con quién compartir mi trabajo y lo explico de manera sencilla para que lo entienda.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. Una de las soluciones de la ecuación $3x^2 - 48 = 0$ es:							
A	x=0	B	x=2	C	x=-4	D	x=12
2. Una de las soluciones de la ecuación $6x^2 = 9x$ es:							
A	$x=\frac{3}{2}$	B	$x=-\frac{3}{2}$	C	$x=-\frac{2}{3}$	D	$x=\frac{2}{3}$

Respuesta: 1C; 2A

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $x_1 = 11 \ , \ x_2 = -11$

2) $x_1 = -\frac{9}{7} \ , \ x_2 = 0$

3) $x_1 = -\frac{5}{4} \ , \ x_2 = \frac{5}{4}$

4) $x_1 = 3 \ , \ x_2 = 0$

5) $x_1 = 2 \ , \ x_2 = 0$

LECCIÓN 1.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS(COMPLEMENTODECUADRADOS).

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve ecuaciones cuadráticas aplicando el método cuadrado perfecto.

SABERES PREVIOS:

$x^2 + 4x + 4$ $\quad$ $9n^2 + 12mn + 4m^2$ $\quad$ $100 - 20y + y^2$

• ¿Recuerdo cómo es la factorización del trinomio cuadrado perfecto?
• ¿Recuerdo la técnica de factorización por complemento de cuadrados?

APRENDO

El lado del espejo de la imagen mide x+3 cm, si se sabe que es cuadrado, ¿Cuál es su área?

A = (x+3) (x+3) = $(x+3)^2$ cm^2

Recuperado de:
https://goo.gl/x98osZ

Cuando tengo el cuadrado de un binomio, aplico la técnica de los productos notables para encontrar el desarrollo de manera sencilla.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Ambos desarrollos poseen tres términos; es decir, son trinomios. Además tienen ciertas características que al cumplirse, me permite aplicar la factorización y expresarlo como el cuadrado de un binomio.

- Hay dos términos que son cuadrados perfectos: a^2 y b^2.
- Hay un término que cumple con ser el doble producto de las raíces de los otros dos: 2ab
- Si se cumplen las anteriores condiciones, tengo un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Cuando tengo la expresión $a^2 + 2ab$, puedo deducir cuál es el tercer término tomando como base el segundo y, de esa manera completar el trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 1: Encuentro el cuadrado que falta en la expresión $25x^2 + 30x$, para que sea un trinomio cuadrado perfecto (TCP abreviado).

	$25x^2 + 30x$
Identifico cuál de los términos es cuadrado perfecto:	$25x^2$
Calculo la raíz cuadrada:	$\sqrt{25x^2} = 5x$
Multiplico por dos (el dos es por lo del doble producto):	$2(5x) = 10x$
Divido el término que no es cuadrado entre el resultado anterior:	$\frac{30x}{10x} = 3$
Elevo al cuadrado:	$(3)^2 = 9$
Entonces el cuadrado que falta es 9.	

Ya con los cuadrados obtengo las respectivas raíces y puedo construir el binomio que da origen al trinomio: $25x^2 + 30x + 9 = (5x+3)^2$

Ejemplo 2: Encuentro el cuadrado que falta en la expresión $9m^2 - 24mn$, para que sea un TCP.

	$9m^2 - 24mn$
Identifico cuál de los términos es cuadrado perfecto:	$9m^2$
Calculo la raíz cuadrada:	$\sqrt{9m^2} = 3m$
Multiplico por dos (el dos es por lo del doble producto):	$2(3m) = 6m$
Divido el término que no es cuadrado entre el resultado anterior.	$\frac{-24mn}{6m} = -4n$
Elevo al cuadrado:	$(-4n)^2 = 16n^2$
Entonces el cuadrado que falta es:	$16n^2$

Ya con los cuadrados obtengo las respectivas raíces y el signo del doble producto, puedo construir el binomio que da origen al trinomio: $9m^2 - 24mn + 16n^2 = (3m - 4n)^2$

Ejemplo 3: He medido un terreno rectangular, cuya área en metros cuadrados está expresada por $49a^2 - 42a + 12$. Si quiero cercar dentro del terreno una parcela cuadrada lo más grande posible, ¿cuál sería su área?

	$49a^2 - 42a + 12$
Identifico el primer término cuadrado perfecto:	$49a^2$
Calculo la raíz cuadrada:	$\sqrt{49a^2} = 7a$
Multiplico por dos (el dos es por lo del doble producto):	$2(7a) = 14a$
Divido el término que no es cuadrado entre el resultado anterior.	$\frac{-42a}{14a} = -3$
Elevo al cuadrado:	$(-3)^2 = 9$
Entonces el cuadrado que falta es 9.	

El área del terreno cuadrado sería $49a^2 - 42a + 9$.

Este método de complemento de cuadrado lo puedo aplicar para resolver ecuaciones cuadráticas completas $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejemplo 4: Mi vecino vende muebles de madera. Él ha deducido que puede calcular sus ganancias mensuales utilizando la ecuación $x^2 - 7x - 30 = 0$, siendo x el número de muebles vendidos. Si en la ecuación ya se tomaron en cuenta los costos de fabricación y la mano de obra. ¿Cuántos muebles debe vender al mes, para empezar a tener ganancias?


Recuperado de: https://goo.gl/9jihci

	$x^2 - 7x - 30 = 0$	$x^2 - 7x$
Despejo los términos con "x" a un lado:	$x^2 - 7x = 30$	x^2
Agrego a ambos lados el completo del trinomio (ver cálculo del mismo en cuadro de la derecha):	$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 30 + \frac{49}{4}$	$\sqrt{x^2} = x$ $2(x) = 2x$
Factorizo el trinomio:	$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 30 + \frac{49}{4}$	$\frac{-7x}{2x} = -\frac{7}{2}$
Reduzco el lado derecho:	$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$	$\left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$
Transpongo el cuadrado:	$x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{169}{4}}$	
Extraigo la raíz cuadrada:	$x - \frac{7}{2} = \pm\frac{13}{2}$	
Despejo "x":	$x = \frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}$	
Reduzco las fracciones:	$x = \frac{7 \pm 13}{2}$	
Separo las dos respuestas:	$x = \frac{7+13}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{7-13}{2}$	
Reduzco cada respuesta:	$x = \frac{20}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{-6}{2}$	
Simplifico las fracciones:	$x = 10$ $\qquad$ $x = -3$	

La respuesta $x=-3$ no es válida; ya que estamos calculando número de muebles, por lo que no puede ser un número negativo.

Cuando x=10 la ecuación se hace cero, esto quiere decir que no hay ganancia. Por tanto, para empezar a percibir ganancias debe vender por lo menos 11 muebles en el mes.
Ejemplo 5: Resuelvo la ecuación $8x^2 - 2x - 15 = 0$

Divido toda la ecuación entre 8 para dejar solo “x^2”:	$x^2 - \frac{2x}{8} - \frac{15}{8} = 0$ $x^2 - \frac{x}{4} - \frac{15}{8} = 0$	$x^2 - \frac{x}{4}$ x^2 $\sqrt{x^2} = x$ $2(x) = 2x$
Despejo los términos con “x” a un lado:	$x^2 - \frac{x}{4} = \frac{15}{8}$	$\frac{\frac{x}{4}}{\frac{2x}{1}} = \frac{x}{8x} = \frac{1}{8}$
Agrego a ambos lados el completo del trinomio (ver cálculo del mismo en cuadro de la derecha):	$x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{64} = \frac{15}{8} + \frac{1}{64}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$
Factorizo el trinomio:	$\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{15}{8} + \frac{1}{64}$	
Reduzco el lado derecho:	$\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{121}{64}$	
Transpongo el cuadrado:	$x - \frac{1}{8} = \pm\sqrt{\frac{121}{64}}$	
Extraigo la raíz cuadrada:	$x - \frac{1}{8} = \pm\frac{11}{8}$	
Despejo “x”:	$x = \frac{1}{8} \pm \frac{11}{8}$	
Reduzco las fracciones:	$x = \frac{1 \pm 11}{8}$	
Separo las dos respuestas:	$x = \frac{1+11}{8}$ $x = \frac{1-11}{8}$	
Reduzco cada respuesta:	$x = \frac{12}{8}$ $x = \frac{-10}{8}$	
Simplifico las fracciones:	$x = \frac{3}{2}$ $x = -\frac{5}{4}$	

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He recordado qué es un trinomio cuadrado perfecto.		
He aprendido a encontrar el segundo cuadrado perfecto para completar.		
He aprendido a aplicar el complemento de cuadrado para encontrar el cuadrado de un binomio.		
He aprendido con seguridad la secuencia para resolver una ecuación cuadrática completa usando el método de complementación de cuadrados.		

PRACTICO

1

Resuelvo las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de complemento de cuadrados y siguiendo de forma ordenada el paso a paso.

1) $x^2-11x + 30 = 0$
2) $x^2 - 4x - 12 = 0$
3) $x^2 + 17x + 70 = 0$
4) $12x^2 - 7x + 1 = 0$

2

Resuelvo los siguientes problemas:

1) El área de una piscina cuadrada es de $25x^2 - 40x + 16$, ¿cuál es la longitud de su lado?
2) Vamos a repartir una pizza rectangular de $3x+4$ cm de largo por $3x-1$ cm de ancho. Si queremos una porción cuadrada lo más grande posible, ¿cuánto mediría su lado?

APLICO

Mi tío Juan tiene un terreno, formado por una parte cuadrada que mide “x” varas y la otra parte que es rectangular, cuyo ancho es igual que el del cuadrado; pero de largo tiene 9 varas. El área del terreno es de 90 varas cuadradas. La ecuación que representa este caso es $x^2 + 9x = 90$ Resuelvo la ecuación usando el método de complemento de cuadrados y verifico en un terreno amplio con la ayuda de un amigo, si mis respuestas coinciden efectivamente.

Luego observo mi entorno y propongo una situación problemática que me lleve a aplicar ecuaciones cuadráticas y la resuelvo aplicando el método de complemento de cuadrados.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es el binomio cuyo desarrollo es $x^2 - 12x + 36$?							
A	$(x - 6)^2$	B	$(x + 6)^2$	C	$(x - 18)^2$	D	$(x + 18)^2$
2. El área de una tarima está dada por $x^2 + 4x - 21 = 0$ ¿Cuál es el valor de la variable x?							
A	x=1	B	x=2	C	x=3	D	x=4

Respuesta: 1A; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $x_1 = 5$, $x_2 = 6$

2) $x_1 = -2$, $x_2 = 6$

3) $x_1 = -10$, $x_2 = -7$

4) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{3}$

problemas:

1) $lado = 5x - 4$

2) $lado = 3x - 1$

LECCIÓN 1.5. FÓRMULA CUADRÁTICA.

INDICADOR DE LOGRO:

Calcula las soluciones para ecuaciones cuadráticas, aplicando la fórmula general con orden y seguridad.

SABERES PREVIOS:

Uno de los lados de una mesa mide 15 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 162 cm^2?

Recuperado de: https://goo.gl/1VGdgo

$A = (x)\,(x + 15)$

$162 = x^2 + 15x$

¿Recuerdo el método de completar cuadrados para resolver una ecuación cuadrática?

APRENDO

Dentro de 22 años, la edad de Sara será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 2 años. ¿Qué edad tiene Sara ahora?
Para resolver este problema, debo plantear la ecuación: $x^2 - 6x - 40 = 0$

El procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas completas, usando el complemento de cuadrado, se vuelve repetitivo y fácil de aplicar. Al ser repetitivo, me permite hacer el siguiente procedimiento con la forma completa $ax^2 + bx + c = 0$

<table>
<tr><td>Divido toda la ecuación entre “a” para dejar solo “x2”:</td><td>$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$</td><td rowspan="9">$x^2 + \frac{bx}{a}$
x^2
$\sqrt{x^2} = x$
$2(x) = 2x$
$\frac{\frac{bx}{a}}{\frac{2x}{1}} = \frac{bx}{2ax} = \frac{b}{2a}$
$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$</td></tr>
<tr><td>Despejo los términos con “x” a un lado:</td><td>$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$</td></tr>
<tr><td>Agrego a ambos lados el completo del trinomio (ver cálculo del mismo en cuadro de la derecha):</td><td>$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$</td></tr>
<tr><td>Factorizo el trinomio:</td><td>$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$</td></tr>
<tr><td>Reduzco el lado derecho:</td><td>$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$</td></tr>
<tr><td>Transpongo el cuadrado:</td><td>$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$</td></tr>
<tr><td>Extraigo la raíz cuadrada:</td><td>$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Despejo “x”:</td><td>$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Reduzco las fracciones y listo.</td><td>$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$</td></tr>
</table>

Ahora tengo la expresión algebraica llamada "fórmula cuadrática":

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo especial de esta fórmula, es que ya puedo obtener, si existen, los valores que son la solución a una ecuación cuadrática.

Ejemplo 1: Resuelvo $x^2 - 7x + 10 = 0$

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$ Para este ejemplo: $x^2 - 7x + 10 = 0$ $a = 1$ $b = -7$ $c = 10$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x = \frac{7 \pm 3}{2}$ $x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$ $\quad x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

En este ejercicio, las soluciones me resultaron enteras.

Ejemplo 2: Resuelvo $10x^2 - 17x + 3 = 0$

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$ Para este ejemplo: $10x^2 - 17x + 3 = 0$ $a = 10$ $b = -17$ $c = 3$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(10)(3)}}{2(10)}$ $x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 120}}{2}$ $x = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{20}$ $x = \frac{17 \pm 13}{20}$ $x_1 = \frac{17+13}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ $\quad x_2 = \frac{17-13}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

En este ejercicio las soluciones me resultaron fraccionarias.

Ejemplo 3: Resuelvo $25x^2 + 70x + 49 = 0$

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$ Para este ejemplo: $25x^2 + 70x + 49 = 0$ $a = 25$ $b = 70$ $c = 49$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(70) \pm \sqrt{(70)^2 - 4(25)(49)}}{2(25)}$ $x = \frac{70 \pm \sqrt{4{,}900 - 4{,}900}}{50}$ $x = \frac{70 \pm \sqrt{0}}{50}$ $x = \frac{70 \pm 0}{50}$ $x_1 = \frac{70+0}{50} = \frac{70}{50} = \frac{7}{5}$ $\quad x_2 = \frac{70-0}{50} = \frac{70}{50} = \frac{7}{5}$

En este caso las soluciones me resultaron idénticas.

Ejemplo 4: Resuelvo $x^2 - 4x + 5 = 0$

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$ Para este ejemplo: $x^2 - 4x + 5 = 0$ $a = 1$ $b = -4$ $c = 5$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x =$ $x = \frac{16 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$ $x = \frac{16 \pm \sqrt{-4}}{2}$ $x = No\ existe\ en\ los\ reales$

En este caso, la ecuación no tiene solución porque $\sqrt{-4}$, no es un número Real.

Ejemplo 5: La ecuación para encontrar dos números, cuya suma es 19 y su producto es 84 es la siguiente: $x^2 - 19x + 84 = 0$. Calculo los dos números.

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$ Para este ejemplo: $x^2 - 19x + 84 = 0$ $a = 1$ $b = -19$ $c = 84$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x =$ $x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 336}}{2}$ $x = \frac{19 \pm \sqrt{25}}{2}$ $x = \frac{19 \pm 5}{2}$ $x_1 = \frac{19+5}{2} = \frac{24}{2} = 12$ $\quad$ $x_2 = \frac{19-5}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Comprobación: 12+7=19 y 12·7 = 84

Ejemplo 6: Calculo los lados de un rectángulo, cuya área es 195 m^2 y la longitud del largo es 2m más grande que la del ancho.

La ecuación que se plantea con esta situación es : $x^2 + 2x - 195 = 0$.

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$ Para este ejemplo: $x^2 + 2x - 65 = 0$ $a = 1$ $b = 2$ $c = -195$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x =$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 780}}{2}$ $x = \frac{2 \pm 28}{2}$ $x_1 = \frac{2+28}{2} = \frac{30}{2} = 15$ $\quad$ $x_2 = \frac{2-28}{2} = \frac{26}{2} = 13$

Comprobación: 15 - 13 = 2 y 15·13=195

A la expresión $b^2 - 4ac$, le doy el nombre de "discriminante" y lo represento con el símbolo "Δ" que es la letra griega "delta": $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cuando calculo el discriminante primero, puedo saber en base al resultado:

- Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones diferentes, como en el ejemplo 1 y 2
- Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones repetidas que se interpretan como una sola, como en el ejemplo 3.
- Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene una solución en los números reales, como en el ejemplo 4.

Ejemplos: Determino aplicando el determinante delta, si las ecuaciones planteadas tienen solución o no.

Ecuación	**Determinante $\Delta = b^2 - 4ac$**	**N° de soluciones**
$x^2 + 3x - 4 = 0$	$\Delta=(3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = \mathbf{25}$	Tiene dos
$12x^2 + 32x + 5 = 0$	$\Delta=(32)^2 - 4(12)(5) = 1{,}024 - 240 = \mathbf{784}$	Tiene dos
$9x^2 - 6x + 1 = 0$	$\Delta=(-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = \mathbf{0}$	Tiene una
$x^2 - 6x + 10 = 0$	$\Delta=(-6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = \mathbf{-4}$	No tiene
$x^2 - x + 1 = 0$	$\Delta=(-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = \mathbf{-3}$	No tiene
$12x^2 -7x + 1 = 0$	$\Delta=(-7)^2 - 4(12)(1) = 49 - 48 = \mathbf{1}$	Tiene dos

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	**SÍ**	**NO**
He aprendido cómo deducir la fórmula cuadrática.		
Identifico los valores que debo utilizar en la fórmula cuadrática.		
Aplico la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones cuadráticas.		
Utilizo el determinante delta para poder establecer el número de soluciones en los reales que posee una ecuación cuadrática.		

PRACTICO

1

Resuelvo las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando la fórmula cuadrática.

$x^2 - 11x + 30 = 0$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x^2 + 17x + 70 = 0$

2

Resuelvo los siguientes problemas:

a) Para encontrar dos números consecutivos cuya suma de sus cuadrados es 145, planteo la ecuación $2x^2 + 2x - 144 = 0$ y resuelvo.

b) La ecuación para encontrar dos números cuya suma es 5 y la suma de sus cuadrados es 73 es $2x^2 - 10x - 48 = 0$. Encontrar los números.

c)La base de una caja mide 20 cm menos que la altura y su área es de 1664 cm2. Calculo la medida de la base y de la altura si la ecuación relacionada con el problema es $x^2 + 20x - 1664 = 0$.

3

Determino aplicando el determinante Δ, si las ecuaciones planteadas tienen solución.

Ecuación	Determinante $\Delta = b^2 - 4ac$	N° de soluciones
$x^2 + 2x - 7 = 0$		
$3x^2 - 5x + 8 = 0$		
$-2x^2 + 6x - 9 = 0$		
$10x^2 - 7x + 4 = 0$		
$12x^2 + 5x - 1 = 0$		

APLICO

Mido las medidas de largo y ancho de una puerta, una mesa rectangular y una ventana, calculo el área de cada uno. Luego planteo las ecuaciones definiendo como incógnita la base o la altura. Resuelvo las ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática y verifico si las respuestas coinciden con los datos medidos.

Observo en mi entorno otras dos situaciones en las que pueda aplicar la fórmula cuadrática, planteo la ecuación y resuelvo. Anoto todos los resultados en mi cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El valor de Δ en la ecuación $x^2 - 12x + 36 = 0$ es:							
A	-2	B	-1	C	0	D	1
2. En una liga de softbol con "n" equipos deben programarse 21 partidos. Si este cálculo está dado por la ecuación $n^2 - n - 20 = 0$. ¿Cuántos equipos hay en la liga?							
A	n=6	B	n=8	C	n=7	D	n=5

Respuesta: 1C; 2D

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $x_1 = 5$, $x_2 = 6$
2) $x_1 = -2$, $x_2 = 6$
3) $x_1 = -10$, $x_2 = -7$

problemas.

a) $x_1 = -9$, $x_2 = 8$
b) $x_1 = -3$, $x_2 = 8$
c) $base = 32\ cm$, $altura = 52\ cm$

3) Determino aplicando el determinante Δ, si las ecuaciones planteadas tienen solución.

Ecuación	Determinante $\Delta = b^2 - 4ac$	N° de soluciones
$x^2 + 2x - 7 = 0$	32	2
$3x^2 - 5x + 8 = 0$	-71	*ninguna*
$-2x^2 + 6x - 9 = 0$	-126	*ninguna*
$10x^2 - 7x + 4 = 0$	-111	*ninguna*
$12x^2 + 5x - 1 = 0$	73	2

BIBLIOGRAFÍA

- Baldor, A. (2011). Álgebra Baldor. 3era Ed. Distrito Federal: Larousse - Grupo Editorial Patria.

- Ministerio de Educación, (2018) 1era Edición Matemática 9° ESMATE. San Salvador: Ministerio de Educación.

UNIDAD 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

OBJETIVO

- Proponer alternativas de solución a situaciones problemáticas de la vida diaria, aplicando los sistemas de ecuaciones lineales por cualquiera de los métodos algebraicos y gráficos, y valorando el aporte de los demás.

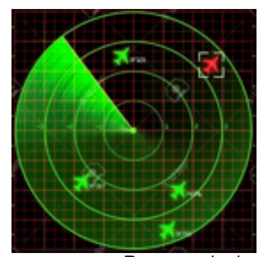
LECCIÓN 2.1. EL PLANO CARTESIANO.

INDICADOR DE LOGRO:

Identifica y coloca con seguridad las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

SABERES PREVIOS:

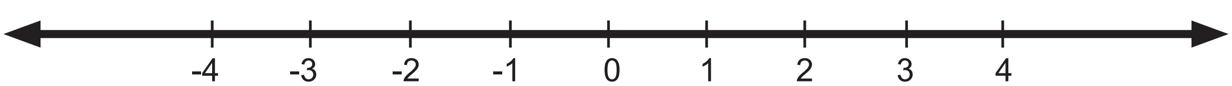
- ¿Cómo se llaman los ejes que forman el plano cartesiano?
- ¿Cómo se ubican los puntos en el plano cartesiano?



Recuperado de:
https://goo.gl/JMyd3b

APRENDO

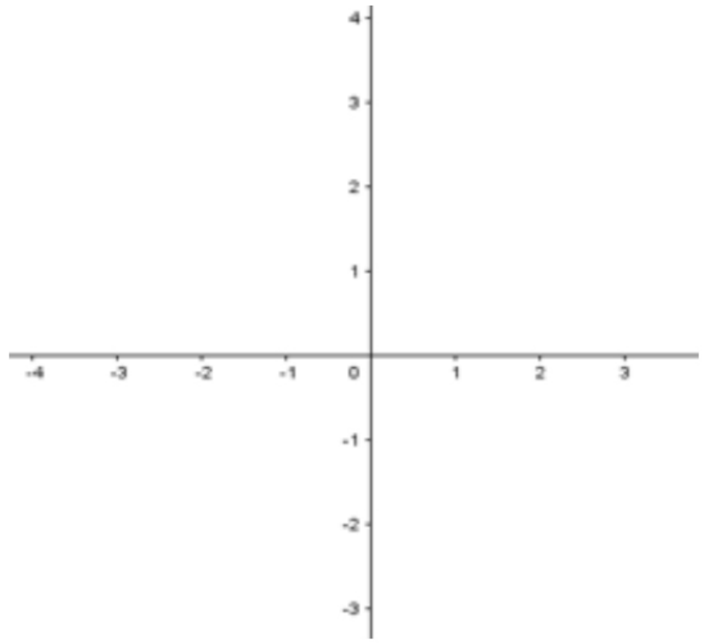
Recuerdo que la recta numérica está formada por todos los números reales:



Observo la figura. Sobre ella comento que está formada por dos rectas; una vertical y otra horizontal, que se cortan en el cero de ambas rectas. Además que a la derecha y arriba del cero se encuentran ubicados los números positivos y, a la izquierda y hacia abajo del cero están ubicados los números negativos. Recuerdo que este conjunto de rectas y números se llama plano cartesiano.

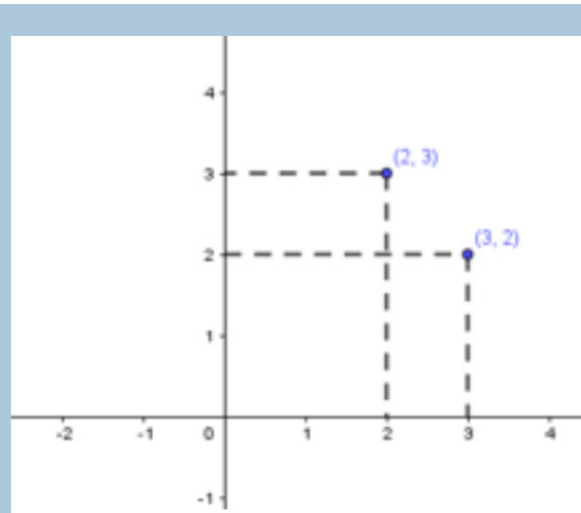
Al eje horizontal le doy el nombre de “eje de las abscisas” o “eje x”, y al eje vertical como “eje de las ordenadas” o “eje y”.

Un “par ordenado” o “coordenada cartesiana”, está formado por dos números entre paréntesis y separados por una coma, que lo represento como (x,y).



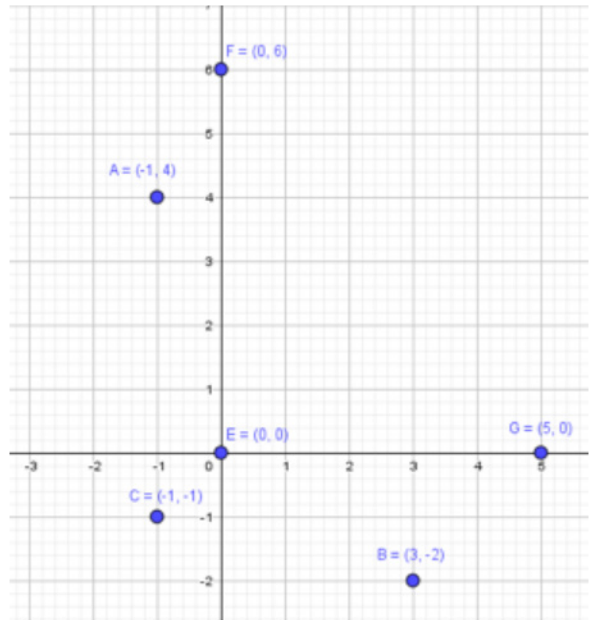
Cada par ordenado, corresponde a un punto en el plano cartesiano y su ubicación parte de “cero”; en donde el valor de “x” me indica la ubicación usando el eje horizontal y, el valor de “y” me indica la ubicación usando el eje vertical. Por ejemplo:

- Observo el par ordenado (3,2) me indica que el punto está ubicado a tres unidades a la derecha y a dos unidades hacia arriba, ambos partiendo del cero.
- El par ordenado (2,3) me indica que el punto está ubicado a dos unidades a la derecha y a tres unidades hacia arriba, ambos partiendo del cero.
- Y aunque ambos pares tienen los mismos números, no representan el mismo punto.



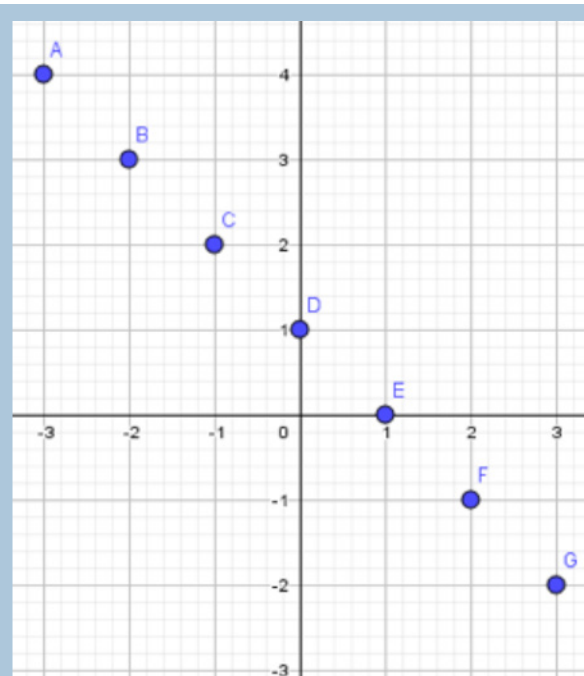
Ejemplo 1: Ubico en el plano cartesiano los siguientes puntos:

A. (-1,4)
B. (3,-2)
C. (-1,-1)
D. (-3,-5)
E. (0,0)
F. (0,6)
G. (5,0)



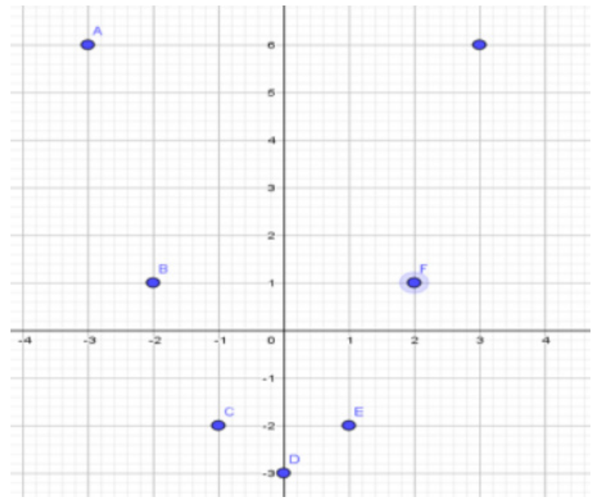
Ejemplo 2: Ubico en el plano cartesiano los siguientes puntos:

A. (-3,4)
B. (-2,3)
C. (-1,2)
D. (0,1)
E. (1,0)
F. (2,-1)
G. (3,-2)



Ejemplo 3: Identifico los puntos colocados en el plano cartesiano:

A. (-3,6)
B. (-2,1)
C. (-1,-2)
D. (0,-3)
E. (1,-2)
F. (2,1)
G. (3,6)



Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido los nombres de los ejes del plano cartesiano		
He aprendido cómo se forma un plano cartesiano		
He aprendido qué es un par ordenado		
He aprendido cómo ubicar un par ordenado en el plano cartesiano		

PRACTICO

Realizo las siguientes actividades:

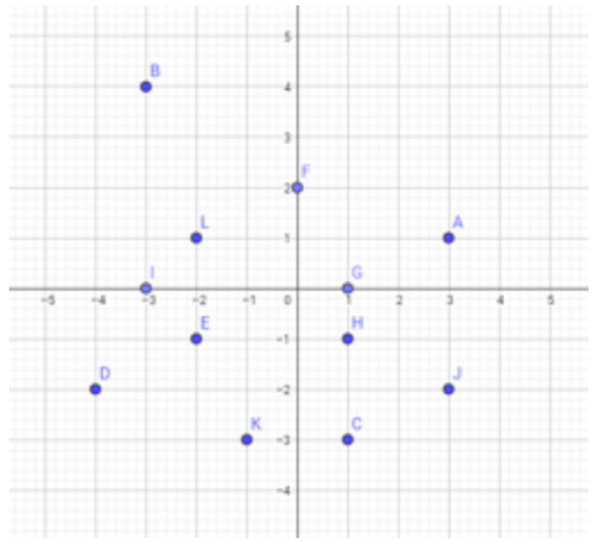
1

Dibujo un plano cartesiano y ubico los siguientes puntos, uniéndolos con una línea recta en orden alfabético. Comienzo por el punto A hasta el punto H.

A. (-2, 1) E. (2, 5)
B. (2, 1) F. (-2, 5)
C. (4, 4) G. (-4, 2)
D. (4, 2) H. (-4, 4)

2

Identifico los puntos ubicados en el plano cartesiano



Resuelvo el siguiente problema:
Esta tarde voy a ir con mi amiga Alicia a ver una película al cine. El siguiente esquema muestra el camino que voy recorrer para pasar por mi amiga y luego irnos al cine. Si las cuadras de mi colonia están representadas por las líneas del plano cartesiano, ¿cuántas cuadras voy a caminar en total?, ¿cuáles son los pares ordenados representados por A, B, C, D y E?

3

APLICO

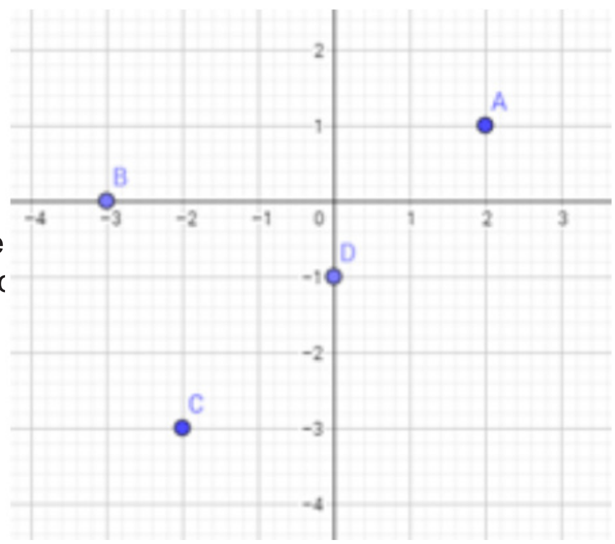
Elaboro en mi cuaderno, un mapa de mi comunidad, establezco el centro de la misma como el punto (0,0) a manera de plano cartesiano y establezco los lugares más populares con sus respectivas coordenadas cartesianas. Lo comparto con amigos o familiares y les comento qué significa cada punto.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El punto que está ubicado a cuatro unidades a la derecha y cinco unidades hacia abajo, ambos partiendo del cero, es el siguiente:							
A	(4, 5)	B	(-4, 5)	C	(4, -5)	D	(-4, -5)

2. El literal donde los pare
puntos A, B, C y D, están esc
es:



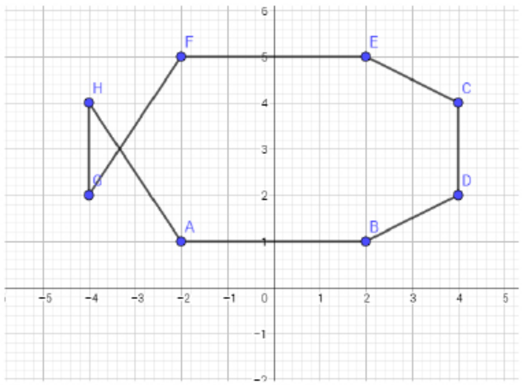
A	A=(2, 1) B=(0, -3) C=(-3, -2) D=(-1,0)	B	A=(2, 1) B=(-3, 0) C=(-3, -2) D=(0,-1)	C	A=(2, 1) B=(-3, 0) C=(-2, -3) D=(0,-1)	D	A=(2, 1) B=(-3, 0) C=(-3, -2) D=(-1,0)

Respuesta: 1C; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1)



2) A(3,1), B(-3,4), C(1,-3), D(-4,-2), E(-2,-1), F(0,2), G(1,0), H(1,-1), I(-3,0), J(3,-2), k(-1,-3), L(-2,1)

3. a) Voy a recorrer 11 cuadras en total.

b) A(1,2), B(1,5), C(5,5), D(5,6), E(8,6)

LECCIÓN 2.2. PENDIENTE ENTRE DOS PUNTOS.

INDICADOR DE LOGRO:

Utiliza y valora el uso de la fórmula de la pendiente de la recta conocidos dos puntos por donde pasa.

Recuperado de: https://goo.gl/fPRn21

Recuperado de: https://goo.gl/dhdHHk

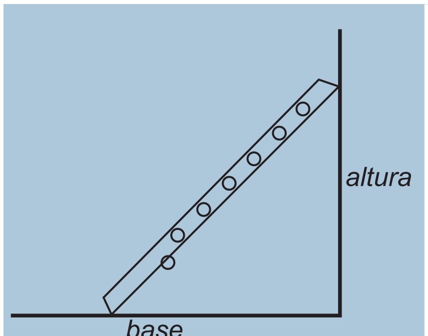
Recuperado de: https://goo.gl/zn2Nix

SABERES PREVIOS:

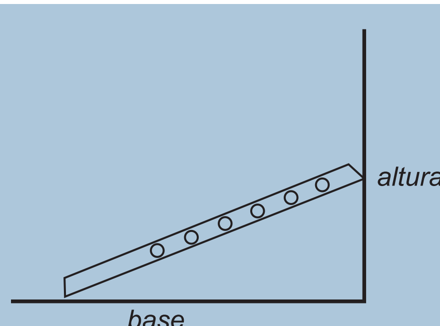
- ¿Qué idea tengo de lo que es una pendiente?
- ¿Qué puedo observar en mi entorno que tenga inclinación?

APRENDO

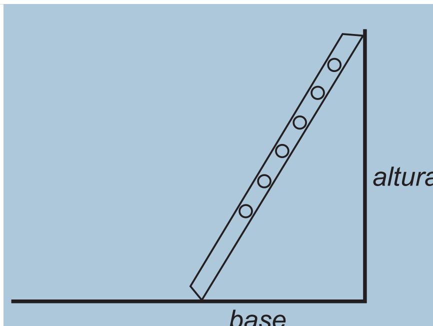
Si apoyo una escalera contra una pared y quiero saber qué tan inclinada se encuentra con respecto al suelo, debo hacer una comparación entre qué tan alta se encuentra la punta de arriba, contra qué tan lejos de la pared está la punta de abajo.



La altura es igual que la base



La altura es menor que la base, “la escalera está menos inclinada”



La altura es mayor que la base, “la escalera está más inclinada”

De igual manera, puedo hacer la misma comparación con dos puntos ubicados en el plano cartesiano, solo debo imaginar que los puntos son los extremos de la escalera y calcular la distancia de altura y de base.

> Una pendiente es la medida numérica, que me permite tener una idea de qué tan inclinado se encuentra algo con respecto a la línea horizontal.

		 Recuperado de: https://goo.gl/dCKcp7
Altura: 3 unidades Base: 3 unidades.	Altura: 2 unidades Base: 4 unidades	Altura: 4 unidades Base:2 unidades

Al valor de la inclinación le doy el nombre de "pendiente" y su símbolo es "m"

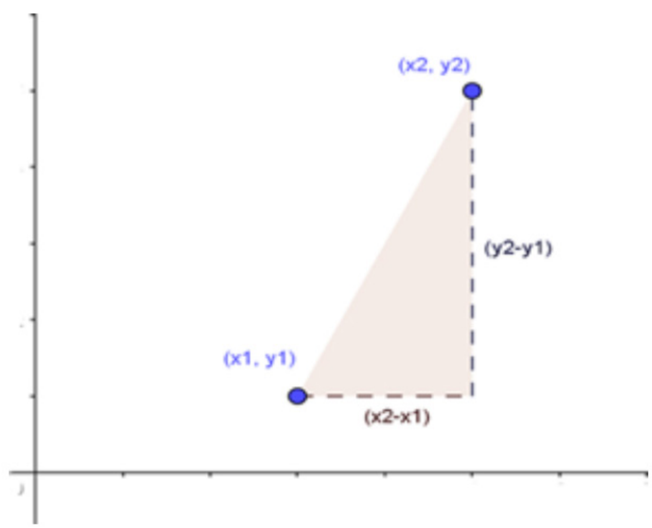
En general, si tengo dos puntos: $A=(x^1,y^1)$ y $B = (x_2,y_2)$, y quiero encontrar el valor de la pendiente de la recta que pasa por A y B, hago la comparación entre la altura y la base:

Altura: $y_2 - y_1$
Base: $x_2 - x_1$

$$m = \frac{\text{altura}}{\text{base}} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

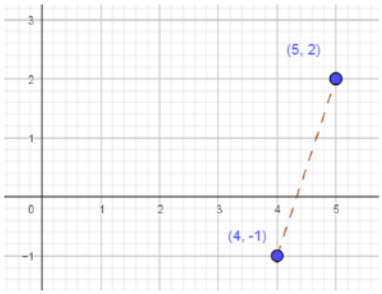
De donde obtengo la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$



Recuperado de: https://goo.gl/dCKcp7

Ejemplo 1: Calculo el valor de la pendiente entre los puntos A=(5,2) y B=(4,-1):



$$(x_2, y_2) = (4, -1)$$

$$(x_1, y_1) = (5,2)$$

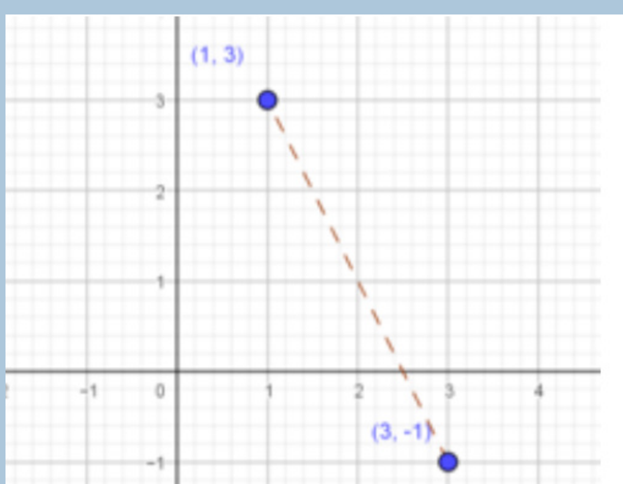
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-1) - (2)}{(4) - (5)} = \frac{-1 - 2}{4 - 5} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\boldsymbol{m = 3}$$

En la vida real, conocer la pendiente de algunas cosas es muy importante; por ejemplo, qué tan inclinada es una montaña. Lo anterior me sirve para decidir si me animo a escalarla; la inclinación de una calle debe ser tomada en cuenta por un conductor, quien decide si su carro la puede subir o no; cuando estoy regando las plantas con una manguera, la inclinación que tenga el chorro me determina qué tan lejos llega el agua, etc.

Para trazar una recta en el plano cartesiano, la pendiente es muy importante; porque determina su dirección.

Ejemplo 2: He trazado un plano de mi comunidad tomando como centro el parque. Mi casa quedó ubicada en el punto (1,3) y la iglesia en el punto (3,-1). Calculo el valor de la pendiente de la línea recta que une los dos lugares.



Recuperado de: https://goo.gl/dCKcp7

$$(x_2, y_2) = (3, -1)$$

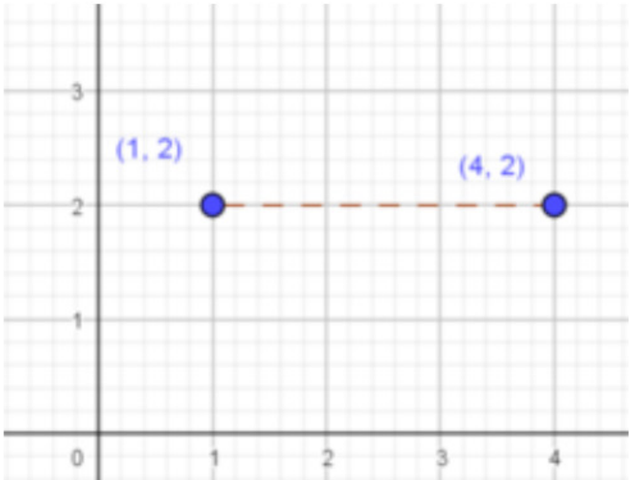
$$(x_1, y_1) = (1,3)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-1) - (3)}{(3) - (1)} = \frac{-1 - 3}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\boldsymbol{m = -2}$$

Una persona que no conozca el lugar, con ver la dirección de la recta tiene la idea de cómo llegar de un lugar al otro.

Ejemplo 3: El tramo de una carretera pasa por los puntos (1,2) y (4,2) ¿Cuál es el valor de su pendiente?



Recuperado de: https://goo.gl/dCKcp7

$$(x_2, y_2) = (1,2)$$

$$(x_1, y_1) = (4,2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(2) - (2)}{(1) - (4)} = \frac{2 - 2}{1 - 4} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\boldsymbol{m = 0}$$

El resultado m=0 significa que no hay pendiente, eso quiere decir que la carretera es horizontal en ese tramo. En una calle horizontal es relativamente más fácil manejar que en una con inclinación hacia arriba o hacia abajo.

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido qué es una pendiente de una línea recta		
He aprendido cómo se deduce la fórmula de la pendiente		
He aprendido a calcular la pendiente dado dos puntos		

PRACTICO

Realizo las siguientes actividades:

1

Calculo el valor de la pendiente entre los puntos dados:

1. A=(4,5) y B=(1,-3)
2. A=(-6,2) y B=(-4,-2)
3. A=(0,-7) y B=(1,-5)
4. A=(6,8) y B=(-2,8)

2

Escribo en cada caso, cuál es la importancia de saber calcular la pendiente:

a) Construir gradas
b) Ponerle el techo a una casa
c) Hacer un tobogán

APLICO

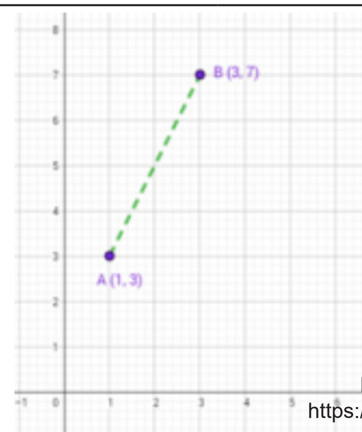
Resuelvo en mi cuaderno la siguiente actividad:

Identifico en mi comunidad alguna calle que tenga inclinación y establezco medidas para poderla representar en una hoja de papel cuadriculado o milimetrado y, de esa manera poder observar la pendiente de la calle de manera gráfica. Explico la utilidad de conocer la pendiente en diferentes situaciones.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El valor de la pendiente que corresponde a la gráfica es:



Recuperado de: https://goo.gl/dCKcp7

A	m=5	B	m=2	C	m=1	D	m=-2

2. La inclinación de las gradas eléctricas de un centro comercial tiene un valor definido por los puntos (1,6) y (8,-1). ¿Cuál es su pendiente?

A	m=-1	B	m=7	C	m=1	D	m=-7

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

Respuesta: 1B; 2A

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $m = \frac{8}{3}$

2) m =-2

3) m =2

4) m =0

2. Escribo en cada caso, cuál es la importancia de saber calcular la pendiente:

a) La inclinación de las gradas debe ser la adecuada para evitar accidentes.

b) La medida en la que se evacue el agua lluvia del techo, depende de la pendiente del techo.

c) Si la pendiente de un tobogán no es adecuada, puede ser que no deslice cuando tiene muy poca inclinación o represente un peligro para los niños porque tenga mucha inclinación.

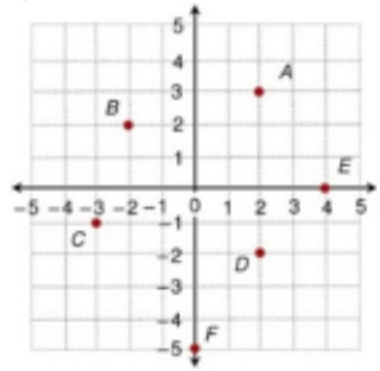
LECCIÓN 2.3. CLASIFICACIÓN DE LA PENDIENTE DE UNA LÍNEA RECTA.

INDICADOR DE LOGRO:

Calcula con exactitud el valor de la pendiente positiva, negativa, cero e indefinida de una recta al conocer los valores de las coordenadas de dos puntos por donde esta pasa.

SABERES PREVIOS:

- ¿Recuerdo qué es un par ordenado?
- ¿Recuerdo cómo se representa un par ordenado en el plano cartesiano?
- ¿Recuerdo qué es una pendiente o inclinación?



Recuperado de: https://goo.gl/dCKcp7

APRENDO

Cuando calculo el valor de una pendiente, éste puede darme una idea rápida de la inclinación de la línea recta, así como si la línea representa un aumento o una disminución.

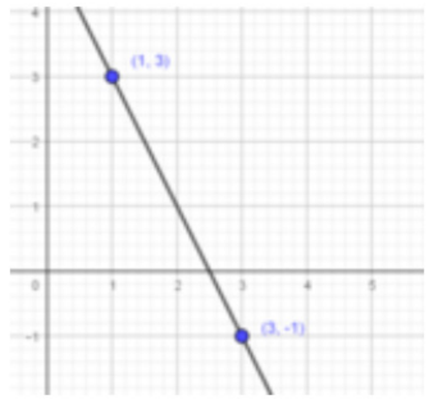
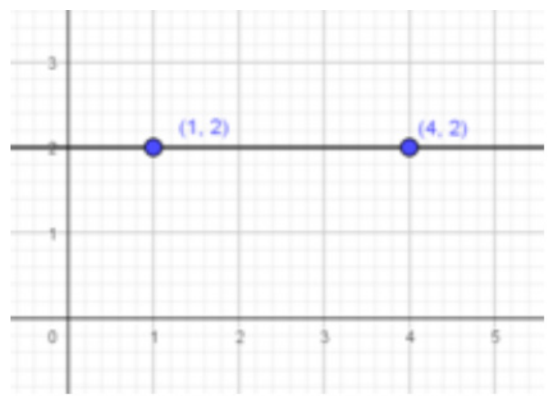
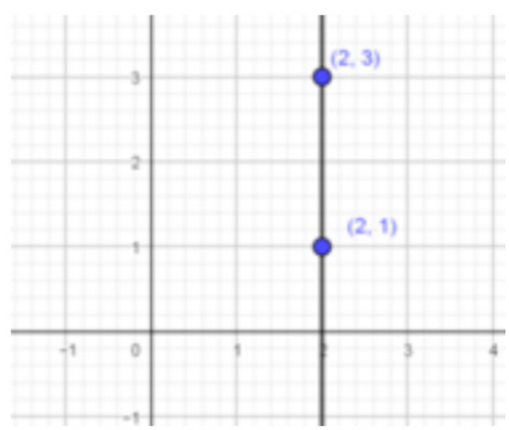
Al encontrar el valor de la pendiente, como en los ejemplos de la lección anterior, puedo observar las siguientes características y representaciones:


Recuperado de: https://goo.gl/scouDC


Recuperado de: https://goo.gl/Kwifcw


Recuperado de: https://goo.gl/9S6VPW


Recuperado de: https://goo.gl/V2PhuS

Valor de la pendiente	Simbología	Tipo de recta	Gráfica
Positivo	$m > 0$	Recta ascendente	
Negativo	$m < 0$	Recta descendente	
Cero	$m = 0$	Recta horizontal	
Indefinida	$m = \nexists$	Recta vertical	

Recuperado de: https://goo.gl/8qqTzS

Ejemplo 1. Calculo la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados, luego especifico qué tipo de recta es.

a) Puntos: $(x_2, y_2) = (4, 3)$ $(x_1, y_1) = (2,6)$	$(2, 6)\ y\ (4,3)$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(6) - (3)}{(2) - (4)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$ $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$
b) Puntos: $(x_2, y_2) = (-5, 2)$ $(x_1, y_1) = (3,8)$	$(-5, 2)\ y\ (3, 8)$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(8) - (2)}{(3) - (-5)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\boldsymbol{m = \frac{3}{4}}$
c) Puntos: $(x_2, y_2) = (6, 7)$ $(x_1, y_1) = (3,7)$	$(6, 7)\ y\ (3, 7)$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(7) - (7)}{(6) - (3)} = \frac{0}{3} = 0$ $\boldsymbol{m = 0}$
6) Puntos: $(x_2, y_2) = (6,4)$ $(x_1, y_1) = (6,2)$	$(6,4)\ y\ (6,2)$ $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{(2)-(4)}{(6)-(6)} = \frac{-2}{0} = indefinido$ $\boldsymbol{m = indefinida}$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido cuando el valor de la pendiente es cero representa una recta horizontal por qué no hay inclinación		
He aprendido qué dependiendo si el valor de la pendiente, así puedo clasificar qué tipo de recta es en general.		

PRACTICO

Calculo el valor de la pendiente que pasa por los puntos dados, determino si es positiva, negativa, cero e indefinida, luego dibujo su gráfica.

1 A = (-1,7)   y B =(-6,-8)

2 A = (2,3)   y B = (-4,3)

3 A = (-5,   4)   y B = (9,0)

4 A = (-2,-9)   y B = (-7,-1)

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno la siguiente actividad

1- Observo el entorno para identificar lugares donde hay objetos ubicados en forma inclinada y a los cuales le pueda calcular la pendiente y clasificarla. Lo comparto con amigos o familiares.

2. Construyo una maqueta pequeña en la que se pueda apreciar los diferentes tipos de pendiente, a manera de calles de una ciudad, detallando pares ordenados, si es positiva o negativa, ascendente o descendente, etc.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. La pendiente de la recta que pasa por los puntos (-10,-6) y (-12,1) es de tipo:							
A	positiva	B	negativa	C	cero	D	indefinida
2. El par de puntos por donde pasa una pendiente indefinida es:							
A	(-1,9) y (-5 ,6)	B	(-8,0) y (3,3)	C	(-2,-1) y (-2,4)	D	(8,4) y (3,4)

Respuesta: 1B; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $m = 3$

2) $m = 0$

3) $m = -\frac{2}{7}$

4) $m = -\frac{8}{5}$

LECCIÓN 2.4. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

INDICADOR DE LOGRO:

Determina y explica con interés un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Recuperado de: https://goo.gl/cBZRyg

SABERES PREVIOS:
Héctor pidió 5 pupusas de queso y 6 revueltas. Le cobran $7.35. Si se sabe que las pupusas de queso cuestan $0.75, ¿cuánto cuestan las revueltas?
Puedo conocer la respuesta resolviendo la ecuación:
6x + 5 (0.75) = 7.35

- ¿Qué clase de ecuación es?
- ¿Cómo resolvería esa ecuación?

APRENDO

Grupo 1

$2x + 4 = 12$

$x + 6 = -7$

$6 = x + 8$

$5 = -4 + x$

Grupo 2

$x + y = 5$

$3 - x = 4y$

$8 = y + 6x$

$y = 2x - 10$

Cuál es la diferencia entre los dos grupos de ecuaciones presentadas?

Observo que los exponentes de todas las incógnitas es uno; además que en el primer grupo las ecuaciones solo tienen una incógnita y en el segundo tienen dos.

Una ecuación lineal es aquella en la que las incógnitas tienen como máximo exponente "uno".

Las ecuaciones lineales con una incógnita tienen solución única. En cambio, cuando tienen dos incógnitas pueden resultar infinitas soluciones; ya que el valor de una depende del valor que tome la otra. Estas ecuaciones se utilizan cuando quiero obtener el valor de las dos variables, las cuales se encuentran relacionadas.

Ejemplo 1: En la ecuación $x+y=10$, puedo hacer una lista de pares de números que cumplen con la igualdad, "3 y 7" , "6 y 4", "0 y 10", estas parejas de números los puedo escribir como pares ordenados (x,y): (3,7); (6,4); (0,10); etc. De manera que cualquier par de números que sumados den diez, forman parte de esas soluciones.

Cuando uno dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, formo un "sistema de ecuaciones". Y lo expreso así: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

Si quiero resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, entonces debo encontrar al menos un par ordenado que sea la solución para ambas ecuaciones al mismo tiempo.

Por ejemplo, el par ordenado (3,7), me sirve cómo solución para la ecuación $x + y = 10$, pero no para la segunda ecuación ya que al sustituir la "x" por 3 y la "y" por 7, el resultado de la operación es -1 y no el 8 que esperaba.

En cambio, el par ordenado (6,4), es la solución del sistema; porque al sustituir la "x" por el 6 y la "y" por el 4, ambas ecuaciones son ciertas.

Tres casos se me pueden presentar con los sistemas de ecuaciones y sus respuestas:

- El sistema tiene solución única.
- El sistema no tiene solución
- El sistema tiene infinitas soluciones por ser ecuaciones equivalentes.

Ejemplo de un sistema que no tiene solución:	Ejemplo de un sistema que tiene infinitas soluciones:
$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ Al ser la misma parte en el lado izquierdo y están igualados a diferentes números.	$\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 10x + 8y = 14 \end{cases}$ La segunda ecuación es múltiplo de la primera.

Las ecuaciones lineales son útiles en la resolución de muchos problemas. Si necesito encontrar el valor de dos incógnitas, debo conocer, por lo menos, dos ecuaciones que relacionen las mismas variables.

Ejemplo 2. Quiero encontrar dos números que, al sumarlos el resultado sea 27 y, al restarlos sea 3.

Mis dos incógnitas son: x: número mayor y y: número menor

La primera condición es que: $x + y = 27$ y la segunda condición es que: $x - y = 3$

Entonces conozco dos ecuaciones que relacionan las dos incógnitas, con las cuales puedo determinar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema voy a encontrar que $x=15$ y $y=12$

Puedo comprobar el resultado sustituyendo los valores encontrados en las dos ecuaciones, si las dos igualdades son ciertas, entonces la respuesta es correcta.

$$\begin{array}{c} x + y = 27 \\ 15+12=27 \\ 27=27 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x - y = 3 \\ 15-12=3 \\ 3=3 \end{array}$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido qué es un sistema de ecuaciones		
He comprendido qué es la solución de un sistema de ecuaciones		
He comprendido qué son las ecuaciones equivalentes		

PRACTICO

1

Elijo correctamente el par ordenado que hace cierto cada sistema de ecuaciones:

(-2,4) (3,1) (5,-1)

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 8y = 12 \\ x + 11y = -6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ -6x - 5y = -8 \end{cases}$

2

Determino el sistema de ecuaciones con dos incógnitas en cada caso:

a) Ayer compré 5 libras de quesillo y 2 de queso duro y pagué $23. Hoy compré 2 libras de quesillo y 6 de queso duro y pagué $30. ¿Cuánto vale la libra de quesillo y la de queso?

b) La diferencia entre la edad de mi mamá y la mía es de 25 años. Si la suma de ambas edades es 47. ¿Cuál es la edad de cada una?

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno la siguiente actividad:

Investigo con un amigo, familiar o vecino que tenga un pequeño negocio, cuáles son los gastos que tiene para mantener el producto y, aproximadamente la venta durante una semana, una quincena o un mes. Determino el sistema de ecuaciones relacionando las variables gastos y ventas, para calcular la ganancia generada por el negocio en el periodo de tiempo elegido. Comparto los resultados obtenidos con el comerciante que me brindó los datos.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. “La altura de un rectángulo mide 15 cm más que su base y su perímetro es de 110 cm. ¿Cuánto mide la base y la altura?” El sistema de ecuaciones que representa la situación anterior es:							
A	$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + 2y = 110 \end{cases}$	B	$\begin{cases} x - y = 15 \\ x + y = 110 \end{cases}$	C	$\begin{cases} 2x+2y = 15 \\ x+y = 110 \end{cases}$	D	$\begin{cases} x- y = 15 \\ 2x+2y = 110 \end{cases}$
2. ¿Cuál es el par ordenado que hace cierto el siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} x - 4y = -14 \\ -3x - 10y = -2 \end{cases}$							
A	(1,-2)	B	(-6,2)	C	(-10,1)	D	(3,-4)

Respuesta: 1B; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1.1 (3,1)

1.2 (5,-1)

1.3 (-2,4)

2) $a)\ \begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 2x + 6y = 30 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x - y = 25 \\ x + y = 47 \end{cases}$

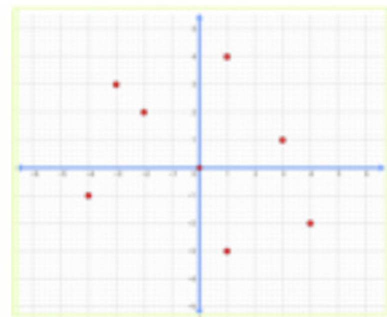
LECCIÓN 2.5. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES, MÉTODO GRÁFICO.

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve con seguridad y precisión el trazo de un sistema de ecuaciones usando el método gráfico.

SABERES PREVIOS:

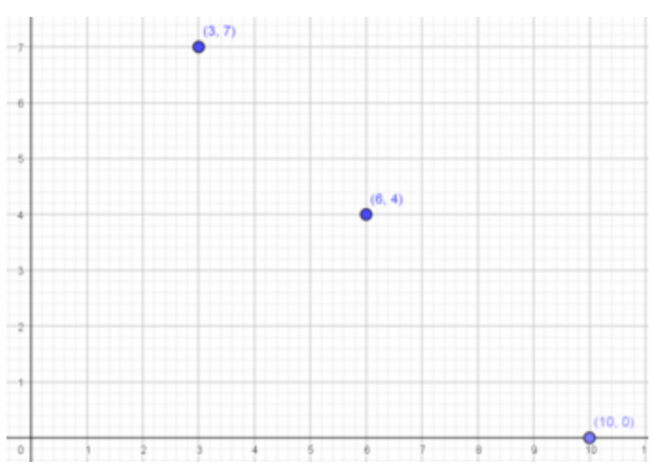
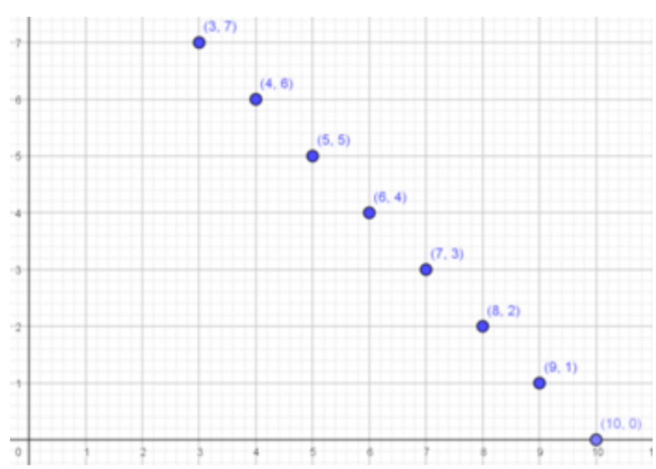
- ¿Recuerdo qué es el plano cartesiano?
- ¿Recuerdo cómo se grafica un par ordenado?



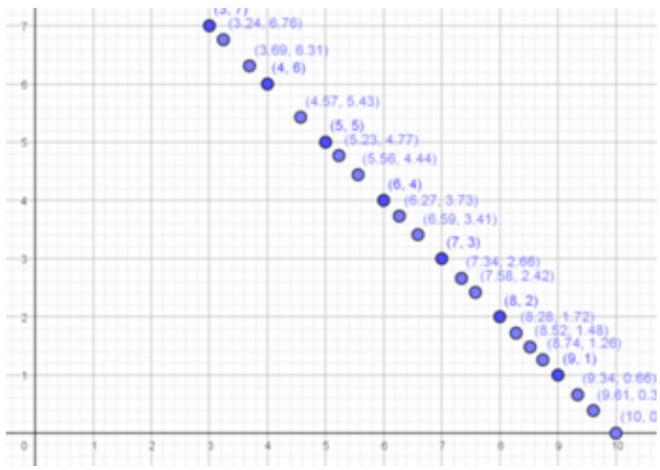
Recuperado de: https://goo.gl/vzUv34

APRENDO

Cuando tengo una ecuación lineal con dos incógnitas, puedo graficar en un plano cartesiano los diferentes pares de valores que dan solución a la ecuación.

Por ejemplo, en la ecuación x+y=10, de los que ya encontré los puntos (x,y): (3,7); (6,4) y (10,0) en la lección anterior, al graficarlos quedarían así: 	Pero si agrego más pares ordenados que sean solución de la ecuación x+y=10, y los ubico en el plano cartesiano, el gráfico me quedaría así: 

Recuperado de: https://goo.gl/vzUv34

Y si agrego aún más, pero esta vez no con números enteros; sino también con números decimales, entonces el gráfico toma esta forma:	Y si siguiera colocando cada vez más y más puntos, hasta llegar a dejar una sucesión de puntos, entonces la gráfica pasaría a ser una línea recta:
	

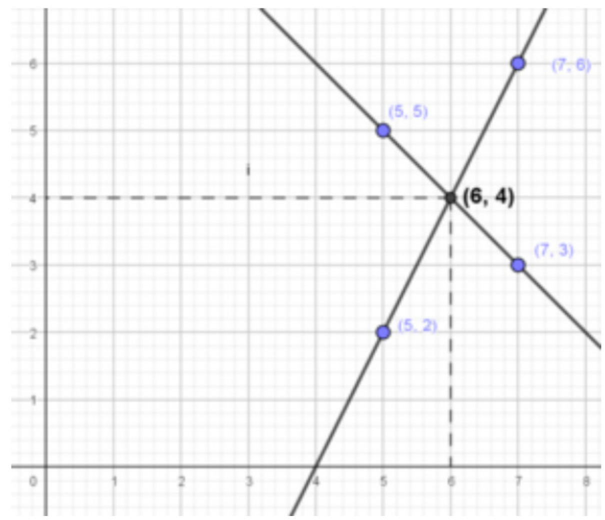
Recuperado de: https://goo.gl/vzUv34

Al conjunto de todos los pares de valores que dan solución a una ecuación lineal de dos incógnitas, lo represento como una línea recta y, para poder trazarla en el plano cartesiano, basta con ubicar al menos dos puntos.

Cuando quiero resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, puedo hacerlo gráficamente. El proceso es encontrar para cada ecuación, dos puntos por donde pase la gráfica. La solución del sistema de ecuaciones es el punto donde se interceptan las dos rectas.

Ejemplo 1: Encuentro la solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

Primero, despejo a "y", de ambas ecuaciones:	x+y=10 y=10-x	2x-y=8 -y=8-2x y=-8+2x y=2x-8
Selecciono dos valores para asignarle a "x", estos pueden ser cualesquiera (de preferencia números pequeños para no complicar el cálculo), en mi caso escojo los valores 5 y 7, que puedo usarlos para ambas ecuaciones y encontrar sus respectivos "y"	Para x=5: y=10-x y=10-(5) y=10-5 y=5 (x,y)=(5,5) Para x=7: y=10-x y=10-(7) y=10-7 y=3 (x,y)=(7,3)	Para x=5: y=2x-8 y=2(5)-8 y=10-8 y=2 (x,y)=(5,2) Para x=7: y=2x-8 y=2(7)-8 y=14-8 y=6 (x,y)=(7,6)

Ahora ubico en el plano cartesiano los dos puntos que he encontrado para cada recta.	A=(5,5) B=(7,3)	C=(5,2) D=(7,6)
El punto donde se cortan las dos rectas, es la solución del sistema, en este caso ese punto es (6,4), por lo que establezco que la solución es: x=6 y=4	 Recuperado de: https://goo.gl/vzUv34	

Ejemplo 2: Encuentro la solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$

Primero, despejo a "y", de ambas ecuaciones:	Recta 1: $5x - 2y = -1$ $-2y = -1 - 5x$ $y = \frac{-1-5x}{-2}$	Recta 2: $-4x + 3y = 5$ $3y = 5 + 4x$ $y = \frac{5+4x}{3}$
En este paso puedo seleccionar los mismos valores o diferentes para cada ecuación y puede ser cualquier valor de x. Para la ecuación $y = \frac{-1-5x}{-2}$ elijo los valores $x = -1$ y $x = 5$	Para $x = -1$: $y = \frac{-1-5x}{-2}$ $y = \frac{-1-5(-1)}{-2}$ $y = \frac{-1+5}{-2}$ $y = \frac{4}{-2} = -2$	Para $x = 5$: $y = \frac{-1-5x}{-2}$ $y = \frac{-1-5(5)}{-2}$ $y = \frac{-1-25}{-2}$ $y = \frac{-26}{-2} = 13$

<table>
<tr>
<td rowspan="1">Para la ecuación

$$y = \frac{5+4x}{3}$$

elijo los valores $x = -2$ y $x = 4$</td>
<td>$(x, y) = (-1, -2)$

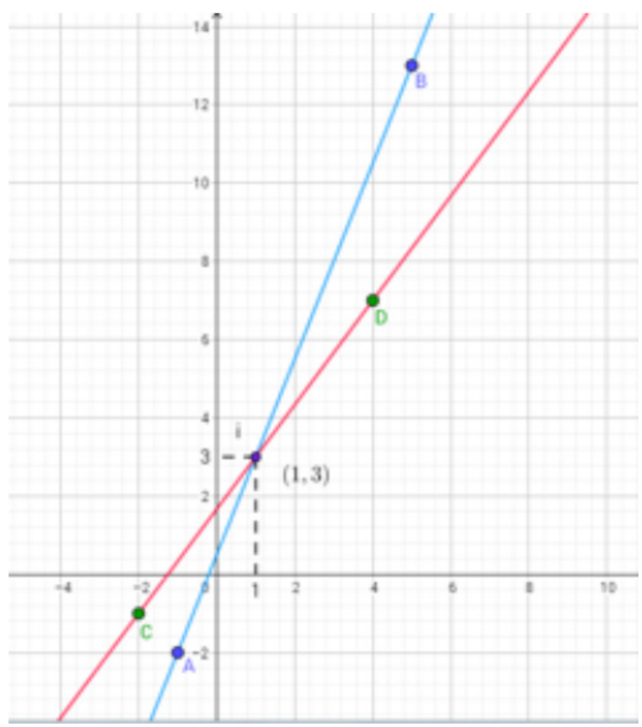
Para $x = -2$:
$$y = \frac{5+4x}{3}$$
$$y = \frac{5+4(-2)}{3}$$
$$y = \frac{5-8}{3}$$
$$y = \frac{-3}{3} = -1$$

$(x, y) = (-2, -1)$</td>
<td>$(x, y) = (5,13)$

Para $x = 4$:
$$y = \frac{5+4x}{3}$$
$$y = \frac{5+4(4)}{3}$$
$$y = \frac{5+16}{3}$$
$$y = \frac{21}{3} = 7$$

$(x, y) = (4, 7)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Ahora ubico en el plano cartesiano los dos puntos que he encontrado para cada recta.
Recta 1:
A=(-1,-2), B=(5,13)

Recta 2:
C=(-2,-1), D=(4,7)

La solución del sistema de ecuaciones es:
x=1
y=3</td>
<td colspan="2">

Recuperado de: https://goo.gl/vzUv34</td>
</tr>
</table>

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido cómo despejar “y” en una ecuación lineal		
He comprendido cómo graficar un ecuación lineal		
He comprendido cómo obtener la solución en la gráfica del sistema.		

PRACTICO

Encuentro la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones, mediante el método gráfico

1
$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 10x - 3y = 5 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} -6x + 9y = -6 \\ 2x + 12y = 32 \end{cases}$$

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno la siguiente actividad:

Construye un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, a partir de la relación existente entre dos tipos de frutas. Relaciono el precio y la cantidad de frutas que vienen en la bolsa; por ejemplo, pueden ser jocotes, manzanas, naranjas, etc. Encuentro la solución del sistema por medio del método gráfico. Muestro mis resultados a un amigo o familiar.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El punto donde se cortan las gráficas de las ecuaciones siguientes es:

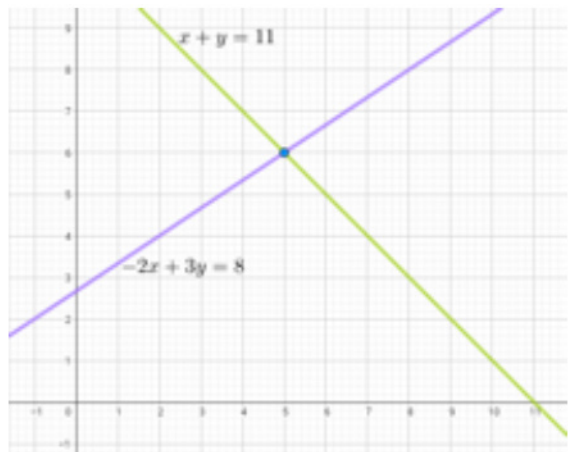
$$\begin{cases} x + y = -4 \\ -3x - 2y = 11 \end{cases}$$

A	(3,1)	B	(3,-1)	C	(-3,1)	D	(-3,-1)

2. Las gráficas del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=11 \\ -2x+3y=8 \end{cases}$$

presentan en la imagen. ¿Cuál es su solución?



Recuperado de: https://goo.gl/vzUv34

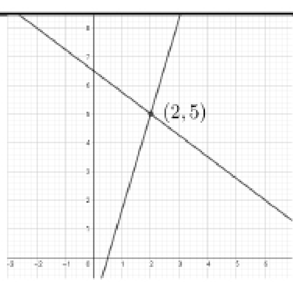
A	(11,0)	B	(5,6)	C	(0,11)	D	(6, 5)

Respuesta: 1D; 2B

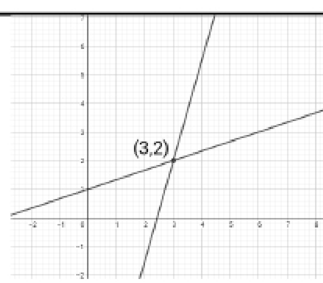
	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

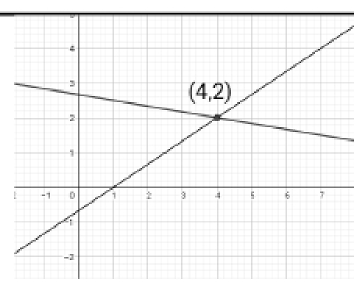
1)



2)



3)



Recuperado de: https://goo.gl/vzUv34

LECCIÓN 2.6. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES, MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

INDICADOR DE LOGRO:

Utiliza con orden el método de sustitución para solucionar problemas de sistemas de ecuaciones.

SABERES PREVIOS:

- ¿Recuerdo cómo se calcula el valor numérico de una expresión?
- ¿Recuerdo cómo se despeja una ecuación?
- ¿Recuerdo qué es una ecuación lineal con dos incógnitas?

Si $a = 2.\ b = 5$ y $c = 1$,
¿Cuál es el valor numérico de las siguientes expresiones?

$$a^2 + 3b + c \qquad 2b - 6a + 4c$$

APRENDO

Si se me plantea resolver un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$\begin{cases} 25x + 32y = 734 \\ 38x - 44y = -82 \end{cases}$$

¿Puedo resolverlo fácilmente aplicando el método gráfico?

Una manera de revolver sistemas de ecuaciones lineales sin utilizar el método gráfico, es aplicando mis conocimientos de álgebra.

Uno de los métodos algebraicos que puedo utilizar es el "método de sustitución", el cual consiste en despejar una incógnita de una ecuación y sustituir este despeje en la segunda ecuación.

Ejemplo 1: Encuentro la solución al sistema: $\begin{cases} x + y = 10 & ec1 \\ 2x - y = 8 & ec2 \end{cases}$	
Despejo "y" en ec1:	$x + y = 10$ $y = 10 - x$ ec3
Sustituyo el valor de "x" en la ec2	$2x - y = 8$ $2(6) - y = 8$ $12 - y = 8$ $-y = 8 - 12$ $-y = -4$ $y = 4$
Solución al sistema:	$x = 6$ $y = 4$

Este procedimiento es más corto y lo considero más fácil que el método gráfico.

Ejemplo 2: Encuentro la solución al sistema: $\begin{cases} x - 4y = -7 & ec1 \\ 2x + 5y = 25 & ec2 \end{cases}$	
Despejo "y" en ec1:	x - 4y = -7 -4y = - 7 - x 4y = 7 + x $y = \frac{7+x}{4} \quad ec3$
Sustituyo la "y" de la ec2, por el valor despejado en la ec3, eso me permite que la ecuación solo quede en términos de "x" y poder despejar para encontrar su valor.	$2x + 5y = 25$ $2x + 5\left(\frac{7+x}{4}\right) = 25$ $4\ (2x) + 5\ (7 + x) = 4\ (25)$ $8x + 35 + 5x = 100$ $8x + 5x = 100 - 35$ $13x = 65$ $x = \frac{65}{13}$ $x=5$
Sustituyo el valor de "x" en la ec2	$2x + 5y = 25$ $2(5) + 5y = 25$ $10 + 5y = 25$ $5y = 25 - 10$ $5y = 15$ $y = \frac{15}{5}$ $y=3$
Solución al sistema:	x = 5 y = 3

Ejemplo 3: Expreso como un sistema de ecuaciones lineales el siguiente problema: "En la bolsa del monedero, tengo 32 monedas, unas de $ 0.25 y otras de $ 0.10, en total tengo $6.20. ¿Cuántas monedas de cada denominación tengo?"

Le asigno el nombre de "x" a la cantidad de monedas de $ 0.25

Le asigno el nombre de "y" a la cantidad de monedas de $ 0.10

La cantidad de monedas la expreso como x+y=32

La cantidad de dinero por las monedas de $ 0.25 es 0.25x

La cantidad de dinero por las monedas de $ 0.10 es de 0.10x

La cantidad de dinero por todas las monedas la expreso como 0.25x+0.10y=6.20

El sistema queda así: $\begin{cases} x + y = 32 & ec1 \\ 0.25x + 0.10y = 6.20 & ec2 \end{cases}$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido la secuencia de pasos para aplicar el método de sustitución.		
He aplicado mis conocimientos de álgebra para resolver el ejercicio.		
He recordado los pasos algebraicos que se me habían olvidado.		

PRACTICO

Encuentro la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones, mediante el método gráfico

1 Encuentro la solución de los sistemas de ecuaciones mediante el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 15x + 8y = 7 \\ -2x + 16y = -18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 20x - 12y = 52 \\ 6x - 14y = 26 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + 16y = 26 \end{cases}$

2 Expreso como un sistema de ecuaciones lineales el siguiente problema y luego lo resuelvo.
En el parqueo de un centro comercial hay 40 vehículos entre motos y carros. Si hay un total de112 ruedas. ¿Cuál es la cantidad de motos y de carros?

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno la siguiente actividad:
1. Busco una zona de parqueo y, en base al ejercicio del practico, elaboro un sistema de ecuaciones lineales utilizando un número de carros y un número de motos, así como el número de llantas.
2. Elijo dos productos en el mercado, investigo su precio y construyo un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Luego lo resuelvo para verificar si está bien planteado
Estas dos actividades las comparto con amigos o familiares, explicando los procesos en cada caso.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 5x - y = -50 \\ 2x + y = -6 \end{cases}$							
A	x = -8 y = -10	B	x = -8 y = 10	C	x = 8 y = -10	D	x = 8 y = 10
2. Si compro 3 blusas y 6 faldas pago $78 y, si compro 5 blusas y 2 faldas pago $74. ¿Cuál es el precio de una blusa y de una falda?							
A	blusa:$12 falda:$7	B	blusa:$5 falda:$9	C	blusa:$8 falda:$8	D	blusa:$10 falda:$9

Respuesta: 1B; 2A

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1. a) $x = 1$, $y = -1$

   b) $x = 2$, $y = -1$

   c) $x = 2$, $y = 3$

   d) $x = \frac{7}{19}$, $y = \frac{11}{19}$

   e) $x = -\frac{2}{25}$, $y = \frac{81}{50}$

problema:

a) Hay 16 carros y 24 motos

LECCIÓN 2.7. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES, MÉTODOS DE IGUALACIÓN Y REDUCCIÓN.

INDICADOR DE LOGRO:

Utiliza con orden el método de igualación para solucionar problemas de sistemas de ecuaciones.

SABERES PREVIOS:

En un salón de clases hay 27 estudiantes. Si hay 9 niñas más que el número de varones, ¿cuántas niñas y cuántos varones hay?

En la bodega de una finca hay 410 lbs de frijoles, empacados en 90 bolsas de 3 y de 10 libras. ¿Cuántas bolsas de cada tamaño hay?

Recuperado de: https://goo.gl/VKvo1W

¿Recuerdo cómo se aplica el método de sustitución para resolver una ecuación lineal con dos incógnitas?

APRENDO

Las dos situaciones anteriores pueden ser expresadas matemáticamente mediante el planteamiento de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las cuáles pueden resolverse mediante el método de sustitución.

Pero existen otros dos métodos algebraicos que vale la pena estudiarlos; ya que al conocerlos todos, puedo elegir el que me parezca más fácil de trabajar en cada caso. Cada uno de ellos me ofrece ventajas a la hora de resolver un sistema, siempre y cuando lo aplique correctamente.

Al primero de los métodos lo llamo “método de igualación”, el cual consiste en despejar una incógnita de una ecuación y despejar la misma incógnita en la segunda ecuación, para luego igualar los despejes.

Ejemplo 1: Encuentro la solución al sistema, mediante el método de igualación: $\begin{cases} x + y = 10 & \text{ec1} \\ 2x - y = 8 & \text{ec2} \end{cases}$	
Despejo “y” en ec1:	$x + y = 10$ $y = 10 - x \quad \text{ec3}$
Despejo “y” en ec2:	$2x - y = 8$ $-y = 8 - 2x$ $y = -8 + 2x$ $y = 2x - 8 \quad \textbf{ec4}$
Igualo la “y” de la ec3 con la “y” de la ec4, eso me permite que la ecuación solo quede en términos de “x” y poder despejar para encontrar su valor.	$10 - x = 2x - 8$ $-x - 2x = -8 - 10$ $-3x = -18$ $x = \frac{-18}{-3}$ $\mathbf{x = 6}$
Y al igual que en el método anterior, sustituyo el valor de “x” en la ec2	$2x - y = 8$ $2(6) - y = 8$ $12 - y = 8$ $-y = 8 - 12$ $-y = -4$ $\mathbf{y = 4}$
Solución al sistema:	$x = 6 \quad y = 4$

Ejemplo 2: Encuentro la solución al sistema: $\begin{cases} x + 4y = -7 & \text{ec1} \\ 2x + 5y = 25 & \text{ec2} \end{cases}$ utilizando igualación	
Despejo “y” en ec1:	$x - 4y = -7$ $-4y = -7 - x$ $4y = 7 + x$ $y = \frac{7 + x}{4} \quad \text{ec3}$
Despejo “y” en ec2:	$2x + 5y = 25$ $5y = 25 - 2x$ $y = \frac{25 - 2x}{5} \quad \text{ec4}$
Igualo la “y” de la ec3 con la “y” de la ec4, eso me permite que la ecuación solo quede en términos de “x” y poder despejar para encontrar su valor.	$\frac{7 + x}{4} = \frac{25 - 2x}{5}$ $5(7+x) = 4(25-2x)$ $35 + 5x = 100 - 8x$ $5x + 8x = 100 - 35$ $13x = 65$ $x = \frac{65}{13}$ $x = 5$

Y al igual que en el método anterior, sustituyo el valor de “x” en la ec2	2x + 5y = 25 2(5) + 5y = 25 10 + 5y = 25 5y = 25 - 10 5y = 15 $5y \frac{15}{5}$ y = 3
Solución al sistema:	x = 5 y = 3

Ejemplo 3: El precio de una camisa y un pantalón es de $37. Compré la camisa con el 20% de descuento y el pantalón con el 10%, por lo que pagué $31.80. ¿Cuál es el precio de la camisa y del pantalón?

Para resolver el problema debo plantear el sistema de ecuaciones correspondiente, si “x” es el precio de la camisa y “y” el precio del pantalón:

Recuperado de: https://goo.gl/J644mk

$$\begin{cases} x + y = 37 & \text{ec1} \\ 0.2x + 0.1y = 38.8 & \text{ec2} \end{cases}$$

Resuelvo utilizando el método de igualación:

Despejo “y” en ec1:	x+y=37 y=37-x ec3
Despejo “y” en ec2:	x-0.2x + y- 0.1y = 31.8 0.8x + 0.9y = 31.8 $y = \frac{31.8 - 0.8x}{0.9}$ ec4
Igualo ec3 con ec4 y despejo “x”	$37 - x = \frac{31.8 - 0.8x}{0.9}$ $37(0.9) - (0.9)x = 31.8 - 0.8x$ $33.3 - 0.9x = 31.8 - 0.8x$ $-0.1x = -1.50$ $x = \frac{-1.50}{-0.1}$ $\boldsymbol{x = 15}$
Sustituyo el valor de “x” en la ec3	y = 37 - x y = 37-(15) y = 22
La solución del sistema es:	x=15 ; y=22
	El pantalón cuesta $22 y la camisa $15

Al segundo método lo llamo “método de reducción” y, sabiéndolo aplicar es mucho más práctico. Este método consiste en hacer una reducción o eliminación de una variable, por medio de una suma o una resta y utilizando el concepto de ecuaciones equivalentes.

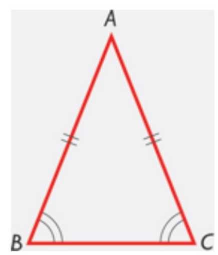
Ejemplo 4: Encuentro la solución al sistema $\begin{cases} x + y = 10 & \text{ec1} \\ 2x + y = 8 & \text{ec2} \end{cases}$ utilizando reducción	
A la ec1:	x + y =10
Le sumo la ec2:	2x - y = 8
El resultado es:	3x =18
De donde solo despejo “x”:	$x = \frac{18}{3}$ $\boldsymbol{x = 6}$

Y el resto es idéntico a los procedimientos anteriores.

A veces debo asegurarme que se cumpla que la incógnita que deseo eliminar tenga el mismo coeficiente positivo en una ecuación y negativo en la otra.

Ejemplo 5: Encuentro la solución al sistema: $\begin{cases} 2x - 7y = -26 & \text{ec1} \\ 5x + 3y = 17 & \text{ec2} \end{cases}$ Opción 1: Elimino “y”	
Multiplico por 3 la ecuación 1 (3 es el coeficiente de la “y” en la ecuación 2):	3 (2x - 7y) = 3 (-26) 6x - 21y = -78 ec3
Multiplico por 7 la ecuación 2: (7 es el coeficiente de la “y” en la ecuación 1)	7 (5x+3y) = 7 (17) 35x + 21y = 119 **ec4**
Reescribo el sistema con las ecuaciones equivalentes ec3 y ec4	$\begin{cases} 6x - 21y = -78 & \text{ec1} \\ 35x + 21y = 119 & \text{ec2} \end{cases}$
Hago la suma de las dos ecuaciones lineales y escribo el resultado eliminando la “y”, para dejar la ecuación con una sola incógnita	$41x = 41$ $x = \frac{41}{41}$ $\boldsymbol{x = 1}$
Sustituyo el valor de “x” en la ecuación 2:	5x + 3y = 17 5(1) + 3y = 17 5 + 3y = 17 3y = 17 - 5 3y = 12 $y = \frac{12}{3}$ y=4
La solución del sistema de ecuaciones es:	x = 1 y = 4

Opción 2: Elimino “x”	
Multiplico por -5 la ecuación 1: (5 es el coeficiente de la “x” en la ecuación 2, y el menos es para cambio de signo)	-5 (2x-7y) = -5 (-26) -10x + 35y = 130 **ec3**
Multiplico por 2 la ecuación 2: (2 es el coeficiente de la “x” en la ecuación 1)	2(5x + 3y) = 2(17) 10x + 6y = 34 ec4
Reescribo el sistema con las ecuaciones equivalentes ec3 y ec4	$\begin{cases} -10x + 35y = 130 & \text{ec1} \\ 10x + 6y = 34 & \text{ec2} \end{cases}$
Hago la suma de las dos ecuaciones lineales y escribo el resultado eliminando la “x”, para dejar la ecuación con una sola incógnita	$41y = 164$ $y = \frac{164}{41}$ $\boldsymbol{y = 4}$
Sustituyo el valor de “x” en la ecuación 2:	$5x + 3y = 17$ $5x + 3(4) = 17$ $5x + 12 = 17$ $5x = 17 - 12$ $5x = 5$ $y = \frac{5}{5}$ $\boldsymbol{y = 1}$
La solución del sistema de ecuaciones es:	x=1 y = 4

Ejemplo 6. En un triángulo isósceles cada uno de sus lados iguales mide el doble de su lado desigual, y su perímetro mide 42 cm. ¿Cuánto miden los lados? El sistema de ecuaciones del problema es: $\begin{cases} x - 2y = 0 & \text{ec1} \\ 2x + 2y = 42 & \text{ec2} \end{cases}$	
Observo que puedo eliminar la variable “y” y despejar “x”	$x - 2y = 0$ $\underline{2x + 2y = 42}$ $3x + 0 = 42$ $3x = 42$ $x = \frac{42}{3}$ $\boldsymbol{x = 14}$
Sustituyo el valor de “x” en la ec1	$x - 2y = 0$ $14 - 2y = 0$ $-2y = -14$ $y = \frac{-14}{-2}$ $\boldsymbol{y = 7}$
La solución del problema es:	Los lados iguales miden 7 cm y el lado desigual 14 cm

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido la secuencia de pasos para aplicar el método de igualación.		
He comprendido la secuencia de pasos para aplicar el método de reducción.		
He aprendido las ventajas de los diferentes métodos para aplicar el que mejor me parezca		

PRACTICO

1 Resuelvo los sistemas de ecuaciones mediante el método de sustitución y el de reducción.

a) $\begin{cases} -4x+3y=4 \\ -7x+y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-2y=12 \\ 10x-4y \ne 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$

2 Resuelvo los siguientes problemas:

a) Juan y Francisco tienen un total de 28 carritos. Si se sabe que Juan tiene 10 más que Francisco. ¿Cuántos carritos tienen cada uno?

b) Al sumar dos números el total es 12. El triple del menor supera en una unidad al doble del mayor. ¿Cuáles son los números?

c) Compré 3 lápices y un lapicero por $6. Mi hermano gastó $9.25 por 3 lápices y 2 lapiceros. ¿Cuánto cuestan los lápices y los lapiceros?

APLICO

Trabajo en mi cuaderno lo siguiente:

Pregunto a un familiar sobre los gastos en la compra de productos alimenticios y la cantidad, selecciono dos pares de ellos que se han comprado en diferentes ocasiones, con los que planteo 2 problemas de sistemas de ecuaciones, los resuelvo y los explico a un familiar o amigo de mi comunidad.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -8x - 11y = 28 \\ 3x + 3y = -24 \end{cases} \text{ es:}$$

A	x = 12 y = 20	B	x=-12 y=20	C	x=-20 y=12	D	x = 20 y = 12

2. En un concierto se venden todas las entradas y se recaudan 4,075 dólares. Las entradas normales cuestan $15 y las vip $35. Calcular cuántas entradas de cada tipo se vendieron, si se sabe que en el local caben 185 personas.

A	normal:100 vip:60	B	normal:120 vip:65	C	normal:65 vip:120	D	normal:120 vip:45

Respuesta: 1C; 2B

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

a) $x = 5, \quad y = 8$

b) $x = -1, \quad y = -9$

c) $x = \frac{13}{8}, \quad y = \frac{1}{4}$

2. problemas

a) Juan tiene 19 carritos y Francisco tiene 9.

b) Los números son 5 y 7.

c) Los lápices cuestan $0.91 y los lapiceros $3.25

$$a) \begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + 2y = 9.25 \end{cases}$$

LECCIÓN 2.8. DETERMINANTES.

INDICADOR DE LOGRO:

Construye con orden determinantes a partir de las ecuaciones.

SABERES PREVIOS:

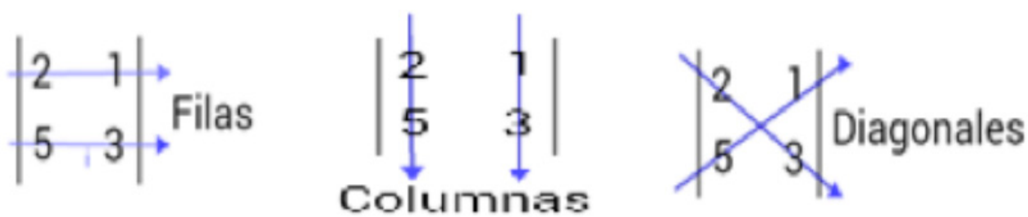
- Señalo cada una de las partes de esta ecuación: $4x - 9y = -64$
- Recuerdo los métodos de solución de una ecuación como esta: $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ -x - 2y = 1 \end{cases}$
- ¿Recuerdo qué es un sistema de ecuaciones de dos incógnitas?
- ¿Recuerdo qué son los coeficientes de las incógnitas y qué son las cantidades constantes en una ecuación?

APRENDO

Observo las ecuaciones anteriores: $\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -x - 2y = 1 \end{cases}$

Identifico los coeficientes de “x”, los coloco en columna, luego hago lo mismo con los coeficientes de “y”, los coloco en una columna a la par de los de la variable “x”, obtuve un arreglo como este $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ que recibe el nombre de matriz.

Una “matriz” está formada por números escritos en una disposición ordenada de filas y columnas.



La expresión $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ es una determinante de segundo orden o de orden 2×2.

La expresión $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ es una determinante de tercer orden o de orden 3 × 3.

En esta última puedo apreciar que hay tres filas (en forma horizontal) y hay tres columnas (en forma vertical), de manera que si me preguntarán cuales números forman la segunda columna, respondo con seguridad -2,3,7; si fuera la tercera fila, respondo 2,7,1. También identifico la diagonal principal por los números 4,3,1 y la diagonal secundaria por los números 2,3,5

Si quiero encontrar el valor de la determinante de orden 2×2, utilizo la fórmula de la derecha, por ejemplo: $$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - 3(4) = 30 - 12 = 18$$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Una de las aplicaciones de esta fórmula es cuando tengo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$\begin{cases} \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d}x + \boldsymbol{e}y = \boldsymbol{f} \end{cases}$	Si quiero encontrar la solución del sistema, solo debo encontrar el valor de las determinantes que se forman para “x” y para “y”, con los coeficientes “a,b,d,e” y las cantidades constantes “c,f”
$x = \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \end{vmatrix}}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \end{vmatrix}}$	Si estoy calculando “x”: En el numerador, la primera columna de la matriz son las cantidades constantes y, la segunda columna, los coeficientes de “y”. Si estoy calculando “y”: En el numerador, la primera columna de la matriz son los coeficientes de “x” y, la segunda columna son las cantidades constantes. El denominador es igual para calcular cualquier incógnita: la primera columna son los coeficientes de “x” y, la segunda, los coeficientes de “y”.

Ejemplo: A partir de los sistemas de ecuaciones dados, construyo las determinantes correspondientes.

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{5}{2}x + 3y = 1 \\ \frac{3}{2}x - 3y = 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d}x + \boldsymbol{e}y = \boldsymbol{f} \end{cases} = \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ Entonces: $a = 2 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad c = 7$ $d = 1 \quad ; \quad e = 3 \quad ; \quad f = 11$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{11} & \mathbf{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}}$

b)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} = \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

c)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} = \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}$$

d)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 3y = 1 \\ \frac{3}{2}x - 3y = 15 \end{cases} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 15 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -3 \end{vmatrix}}$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He recordado los conceptos de fila, columna y diagonal de una determinante.		
He comprendido cómo se hace la sustitución de los coeficientes para construir la determinante del denominador.		
He comprendido cómo se hace la sustitución de los coeficientes y las cantidades constantes para construir cada una de las determinantes de los numeradores.		

PRACTICO

Construyo las matrices a partir de las ecuaciones

a) $\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ -10x + 8y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 12y = 36 \\ -8x - 5y = -43 \end{cases}$

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno la siguiente actividad:

Reviso mi cuaderno y copio los sistemas lineales con dos incógnitas que he estudiado en las lecciones anteriores y escribo los determinantes que corresponden a cada sistema; también puedo buscar en libros de matemática. Le enseño a un amigo cómo se escriben las respectivas determinantes para cada sistema.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es el denominador de la determinante del siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$$

A	$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -12 & -2 \end{vmatrix}$	B	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -12 \end{vmatrix}$	C	$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$	D	$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$

2. Para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$

¿Cuál es la matriz construida correctamente para encontrar el valor de "x"?

A	$\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}$	B	$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}$	C	$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}$	D	$\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}$

Respuesta: 1C; 2A

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -10 & 8 \end{vmatrix}}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -10 & 8 \end{vmatrix}}$

c) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -12 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -8 & -5 \end{vmatrix}}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -8 & -5 \end{vmatrix}}$

LECCIÓN 2.9. DETERMINANTES DE SEGUNDO ORDEN

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve de manera ordenada ejercicios y problemas aplicando determinantes de segundo orden.

SABERES PREVIOS:

• Recuerdo qué son los coeficientes de las incógnitas y que son las cantidades constantes en una ecuación?

• ¿Recuerdo cómo se construye una determinante usando un sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ -x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}$$

APRENDO

Las determinantes se pueden utilizar como un método para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones de varias incógnitas. La ventaja de este método, es que el proceso es mecánico y aritmético; ya que se utilizan fórmulas y se separan los números de las letras.

Ejemplo 1: Encuentro la solución al sistema: $\begin{cases} x + y = 10 & \text{ec1} \\ 2x - y = 8 & \text{ec2} \end{cases}$

Como las fórmulas que utilizo son: $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$

- Primero construyo la determinante del denominador que está formada por los coeficientes de las incógnitas y encuentro su valor:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (2)(1) = -1 - 2 = \mathbf{-3}$$

• Ahora encuentro el valor de numerador de "x":

$$\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = (10)(-1) - (8)(1) = -10 - 8 = \mathbf{-18}$$

• Encuentro el valor de numerador de "y":

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (1)(8) - (2)(10) = 8 - 20 = \mathbf{-12}$$

Hoy que ya tengo los valores de las determinantes solo sustituyo en las fórmulas

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-3} = 6 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-3} = 4$$

La solución del sistema de ecuaciones es x=6 y y=4 R/

En la práctica, este método se hace más corto en escritura:

Ejemplo 2: Encuentro la solución al sistema: $\begin{cases} x - 4y = -7 & \text{ec1} \\ 2x + 5y = 25 & \text{ec2} \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -4 \\ 25 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(-7)(5) - (25)(-4)}{(1)(5) - (2)(-4)} = \frac{-35 + 100}{5 + 8} = \frac{65}{13} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(25) - (2)(-7)}{13} = \frac{25 + 14}{5 + 8} = \frac{39}{13} = 3$$

La solución del sistema de ecuaciones es x = 5 y y = 3 R/

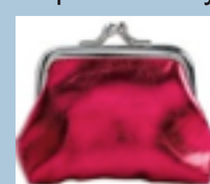
Ejemplo 3: Encuentro la solución al sistema: $\begin{cases} 2x + y = 4 & \text{ec1} \\ 3x + y = 5 & \text{ec2} \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(4)(1) - (5)(1)}{(2)(1) - (3)(1)} = \frac{4 - 5}{2 - 3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(5) - (3)(4)}{-1} = \frac{10 - 12}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

La solución del sistema de ecuaciones es x = 1 y y = 2 R/

Ejemplo 4: Expreso como un sistema de ecuaciones lineales el siguiente problema y luego resuelvo.



Recuperado de: https://goo.gl/UWoBuE

"En la bolsa del monedero, tengo 32 monedas, unas de a $0.25 y otras de $0.10, en total tengo $6.20, ¿Cuántas monedas de cada denominación tengo?

El sistema de ecuaciones que corresponde a la situación planteada es:

$$\begin{cases} x + y = 32 & ec1 \\ 0.25x + 0.10y = 6.20 & ec2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 32 & 1 \\ 6.2 & 0.1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 0.1 \end{vmatrix}} = \frac{(32)(0.1) - (6.2)(1)}{(1)(0.1) - (0.25)(1)} = \frac{3.2 - 6.2}{0.1 - 0.25} = \frac{-3}{-0.15} = 20$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 32 \\ 0.25 & 6.2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 0.1 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(6.2) - (0.25)(32)}{-0.15} = \frac{6.2 - 8}{-0.15} = \frac{-1.8}{-0.15} = 12$$

La solución al problema es 20 monedas de $0.25 y 12 monedas de $0.10 R/

Ejemplo 5: En la feria de mi pueblo gasté $21.75 en 9 vueltas en ruedas para niños y 12 vueltas en las de adultos. Mi amigo Mario gastó $12.50 en 5 vueltas en las ruedas de niños y 7 vueltas en las de adultos. ¿Cuánto vale la vuelta en las ruedas de niños y en las de adultos?

Recuperado de: https://goo.gl/ch5zBj

El sistema de ecuaciones que corresponde a la situación planteada es:

$$\begin{cases} 9x + 12y = 21.75 & ec1 \\ 5x + 7y = 12.50 & ec2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 21.75 & 12 \\ 12.50 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(21.75)(7) - (12.50)(12)}{(9)(7) - (5)(12)} = \frac{152.25 - 150}{63 - 60} = \frac{2.25}{3} = 0.75$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 21.75 \\ 5 & 12.50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(9)(12.50) - (5)(21.75)}{3} = \frac{112.50 - 108.75}{3} = \frac{3.75}{3} = 1.25$$

La solución al problema es: La vuelta en las ruedas de niños cuestan $0.75 y en las de adulto $1.25. R/

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido la secuencia de pasos para deducir las fórmulas para obtener los valores de la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas		
He comprendido cómo sustituir los coeficientes y las constantes para construir las determinantes.		
He aprendido a aplicar el método de las determinantes para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.		

PRACTICO

Resuelvo las siguientes actividades

1

Encuentro la solución de los sistemas, mediante el método de determinantes:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -3x - 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 3y = -4 \\ -2x + y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 6y = 16 \\ -3x - y = -14 \end{cases}$$

2

Encuentro la solución de los problemas, mediante el método de determinantes.

- En un concurso de conocimientos generales, se les da dos puntos al que acierta a la respuesta y se le quita uno al que se equivoca. Si son 50 preguntas y uno de los equipos obtuvo 73 puntos, ¿Cuántas preguntas correctas tuvo? El sistema de ecuaciones que representa esta situación es:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x - y = 73 \end{cases}$$

- Hace 5 años la edad de la madre era 5 veces la edad del hijo. Actualmente, la suma de sus edades es de 70. ¿Cuáles son sus edades? Esta situación se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - 5y = -20 \end{cases}$$

APLICO

En mi cuaderno resuelvo los siguientes ejercicios

1. Tomando como base el problema de las monedas y, con la ayuda de un amigo, tomo 20 monedas, unas de $ 0.05 y unas de $ 0.10. Las deposito en una cajita y le pido a mi amigo que extraiga 10 de ellas al azar, que haga la cuenta y me diga cuánto dinero es. Debo expresar el sistema de ecuaciones y resolverlo utilizando el método de las determinantes.

2. Observo en mi comunidad situaciones en las que se relacionen dos variables y, a partir de esa información, planteo un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y lo resuelvo utilizando determinantes. Luego lo comparto con un familiar o amigo.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} -3x + 2y = -2 \\ -6x + 7y = -16 \end{cases}$$

A	x = -2 y = 4	B	x = -2 y = -4	C	x = 2 y = -4	D	x = 2 y = 4

2.En una semana, un vendedor de celulares vende 3 celulares del modelo A y 2 del modelo B, con una venta total de $770. La siguiente semana vende 5 celulares del modelo A y 8 del B, con una venta de $2,100. ¿Cuál es el precio de cada modelo?

A	A = $200 B = $138	B	A = $100 B = $235	C	A = $140 B = $175	D	A = $125 B = $200

Respuesta: 1B; 2C

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1) a) x=-5, y=7
   b) x=1, y=-3
   c) x=4, y=2

2. problemas:
   Obtuvo 41 respuestas correctas
   La madre tiene 55 años y el hijo tiene 15

LECCIÓN 2.10. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve problemas que conllevan sistemas de ecuaciones de tres incógnitas, con orden y perseverancia.

SABERES PREVIOS:

Las edades actuales de padre, madre e hija, suman 80 actualmente. Dentro de 22 años, la edad de la madre va a ser el doble que la de la hija. El padre es un año mayor que la madre. ¿Cuáles son sus edades?

Recuperado de: https://goo.gl/7ASo1q

X: edad del padre
Y: edad de la madre
Z: edad de la hija

$$\begin{cases} x + y + z = 80 \\ y - 2z = 22 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- ¿Cuáles son los coeficientes del sistema de ecuaciones?
- ¿Podría utilizar el método de reducción para resolverlo?

APRENDO

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es similar a un sistema de dos incógnitas y, por lo tanto, también puedo aplicar los tres métodos algebraicos para encontrar la solución.

El método de reducción es el más práctico, por tanto lo usaré para el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Resuelvo el sistema: $\begin{cases} x + 5y + 3z = 25 & ec1 \\ 3x - 2y - 4z = -11 & ec2 \\ 5x - y - 5z = -7 & ec3 \end{cases}$

Primero selecciono una de las incógnitas para eliminar, en este caso será por el orden la “z”.

- Ahora aplico la reducción a las ecuaciones ec1 y ec2:

Multiplico la ec1 por 4: $4x + 20y + 12z = 100$
Multiplico la ec2 por 3: $9x - 6y - 12z = -33$
Aplico reducción: **$13x + 14y = 67$ ec4**

- Ahora aplico la reducción a las ecuaciones ec1 y ec3:

Multiplico la ec1 por 5: $5x + 25y + 15z = 125$

Multiplico la ec3 por 3: $15x - 3y - 15z = -21$

Aplico reducción: $\mathbf{20x + 22y = 104}$ **ec5**

- Ahora tengo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y le aplico reducción para "y" en la ec4 y ec5

Multiplico la ec4 por 22: $286x + 308y = 1474$

Multiplico la ec5 por – 14: $-280x - 308y = -1{,}456$

Aplico reducción:

$$6x = 18$$
$$x = \frac{18}{6}$$
$$\boldsymbol{x = 3}$$

- Ahora aplico sustitución de "x" en ec4:

$$13x + 14y = 67$$
$$13(3) + 14y = 67$$
$$39 + 14y = 67$$
$$14y = 67 - 39$$
$$14y = 28$$
$$y = \frac{28}{14}$$
$$\boldsymbol{y = 2}$$

- Por último, sustituyo el valor de "x" y el valor de "y" en la ec1:

$$x + 5y + 3z = 25$$
$$(3) + 5(2) + 3z = 25$$
$$3 + 10 + 3z = 25$$
$$3z = 25 - 3 - 10$$
$$3z = 12$$
$$z = \frac{12}{3}$$
$$\boldsymbol{z = 4}$$

Ejemplo 2: Calculo las edades de los miembros de la familia del problema inicial.

Ya conozco el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 80 & \text{ec1} \\ y - 2z = 22 & \text{ec2} \\ x - y = 1 & \text{ec3} \end{cases}$

- Para iniciar, observo que por reducción, puedo eliminar la "y", de las ec2 y ec3.

Aplico reducción:
$$\begin{array}{r} y - 2z = 22 \\ \underline{x - y \qquad = \ 1} \\ \boldsymbol{x + 0 \ - 2z = 23} \quad \boldsymbol{ec4} \end{array}$$

- Por reducción, en ec1 y ec3 puedo eliminar "y":

Aplico reducción:
$$\begin{array}{r} x + y + z = 80 \\ \underline{x - y \qquad = 1} \\ \mathbf{2x + 0 + z = 81} \quad \mathbf{ec5} \end{array}$$

- Con ec4 y ec5, puedo construir un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y por reducción puedo eliminar "z":

Multiplico por 2: $x - 2z = 23$

Aplico reducción: $\underline{4x + 2z = 162}$

Despejo "x": $5x + 0 \ = 185$

$$x = \frac{185}{5}$$

$$\boldsymbol{x = 37}$$

- Como ya tengo el valor de "x", puedo sustituirlo en ec3:

$$x - y = 1$$
$$y = x - 1$$
$$y = 37 - 1$$
$$y = 36$$

- Solo hace falta el valor de "z", este lo puedo despejar en la ec2 y sustituir el valor de "y":

$$y - 2z = 22$$
$$z = \frac{22 - y}{-2}$$
$$z = \frac{22 - (36)}{-2}$$
$$z = \frac{-14}{-2}$$
$$\boldsymbol{z = 7}$$

La solución del problema es: El papá tiene 37 años, la mamá tiene 36 años y la niña tiene 7 años.

Ejemplo 3: Escribo el siguiente problema como un sistema de tres ecuaciones lineales con 3 incógnitas:

"Estoy preparando una encomienda, la cual debo transportar hasta la capital. Llevo tres clases de paquetes, clasificados como pequeño, medianos y grandes. En una caja sellada llevo tres paquetes, un pequeño, un mediano y un grande. Dicha caja pesa 10 libras. La segunda caja sellada contiene tres pequeños, dos medianos y un grande, esta caja pesa 15 libras. La tercera caja sellada contiene dos pequeños, cuatro medianos y un grande. ¿Cuánto pesa cada paquete?

El sistema me quedaría planteado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} p + m + g = 10 & ec1 \\ 3p + 2m + g = 15 & ec2 \\ 2p + 4m + g = 20 & ec3 \end{cases}$$

Donde las letras p, m y g, representan los paquetes pequeños, medianos y grandes respectivamente.

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He comprendido la secuencia de pasos para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.		
He comprendido cómo plantear un sistema de ecuaciones tomando como base un problema que se acomoda a tres ecuaciones con tres incógnitas.		

PRACTICO

1

Encuentro la solución de los sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} 2x + 5y + 10z = -4 \\ -x - 2y + z = 6 \\ 6x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} 5x - 4y - 6z = -30 \\ -3x - 9y - 2z = 7 \\ 2x + 9y + 7z = 15 \end{cases}$$

2

Escribo el siguiente problema como un sistema de tres ecuaciones lineales con 3 incógnitas y luego lo resuelvo:

Voy al mercado y compro 3 libras de queso, 8 bolsas de pan y 4 litros de leche y pago un total de $57. Si hubiera comprado 1 libra de queso, 1 bolsa de pan y 2 litros de leche, hubiera pagado $12. ¿Cuál es el precio de cada cosa, si se sabe que 6 litros de leche cuestan lo mismo que 4 libras de queso?

APLICO

Tomando como base el problema anterior del queso, pan y leche, planteo un sistema de ecuaciones de tres incógnitas utilizando tres artículos de consumo o de uso en el hogar, y la solución del mismo para compartirlo y explicarlo con algún amigo o vecino.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es la solución del sistema de e $\begin{cases} 3x - y + 6z = 35 \\ 4x - 3y - 8z = -30 \\ 7x + 7y + 6z = 23 \end{cases}$

A	x = 1 y = -2 z = 5	B	x=1 y=2 z=5	C	x = -1 y = -2 z = -5	D	x = -1 y = 2 z = -5

2. En una casa trabajan los padres y el hijo. El sueldo del padre es el doble del sueldo del hijo, la madre gana $75 más que el hijo. Si el ingreso total es de $1,775, ¿cuál es el sueldo de cada uno?, si:

p: sueldo del padre
m: sueldo de la madre
h: sueldo del hijo

A	p=$1,100 m=$625 h =$550	B	p= $400 m=$275 h =$200	C	p=$650 m=$400 h =$325	D	p=$850 m=$500 h =$425

Respuesta: 1A; 2D

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1. Encuentro la solución de los sistemas de ecuaciones

a) x=3, y=-4 , z=1

b) x=-2, y=-1 , z=1

2) Problema

a) El queso cuesta $3 la libra, la bolsa de pan cuesta $5 y el litro de leche $2.

BIBLIOGRAFÍA

- Baldor, A. (2011). Álgebra Baldor. 3era Ed. Distrito Federal: Larousse - Grupo Editorial Patria.

- Ministerio de Educación, (2018) 1era Edición Matemática 8° ESMATE. San Salvador: Ministerio de Educación.

UNIDAD 3: TÉCNICAS DE CONTEO

OBJETIVO

- Proponer con criticidad soluciones a diversos problemas relacionados con el ámbito escolar y social, aplicando, permutaciones, combinaciones, potenciación algebraica y sus propiedades.

LECCIÓN 3.1. PERMUTACIONES.

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve problemas con confianza, utilizando las permutaciones.

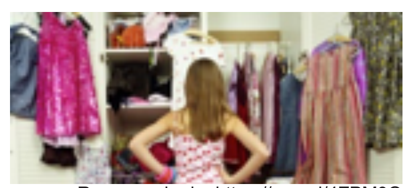
SABERES PREVIOS:

El profesor de educación física quiere formar un equipo de fútbol con alumnos de distintos grados.
Como no conoce sus habilidades para el juego, ¿de cuántas maneras distintas puede elegir la alineación del equipo?

Recuperado de: https://goo.gl/bkxQKj

APRENDO

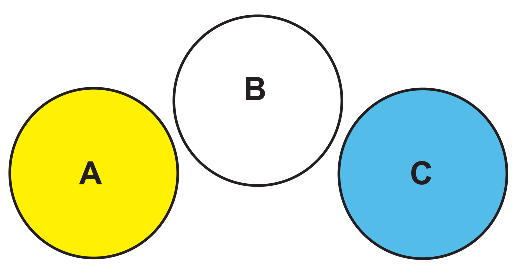
Si Carmen tiene 10 blusas y 6 faldas, ¿de cuántas maneras podría elegir una blusa y una falda para ir este día a trabajar?



Recuperado de: https://goo.gl/4ZPM9Q

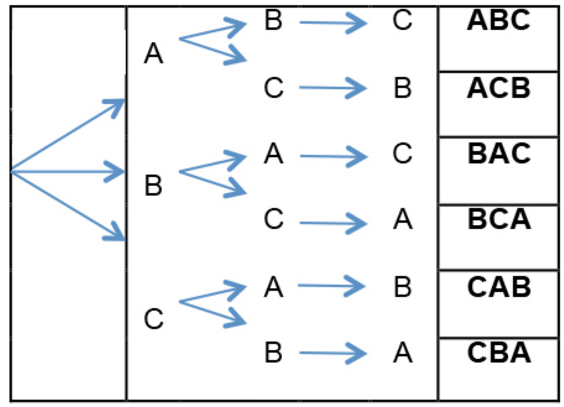
Situaciones como las anteriores, son resueltas en matemática utilizando formas abreviadas para contar.

Ejemplo 1. ¿De cuántas maneras diferentes puedo mezclar 3 colores en una bandera de franjas verticales, si tengo que usarlos todos y no debo repetir ninguno?



Tengo dos formas de responder esto. La primera es en la que hago una lista de “todos” los posibles resultados y, luego los enumero para saber la cantidad. Como ilustración utilizo tres colores cualesquiera, amarillo, blanco y celeste y, los represento con la inicial de sus nombres respectivamente: ABC, CBA, BCA, CAB, ACD, BAC. Pero ¿estoy seguro que esos son “todos” los arreglos?

Para resolver mi duda, puedo aplicar la técnica de diagrama de árbol, que me permite llevar un control sobre cómo voy utilizando los elementos. Efectivamente, solo son seis resultados diferentes; ya que el orden de los colores influye en la diferencia.



La segunda forma es calcular cuántos elementos son, sin necesidad de enumerarlos. A este método lo llamo: “técnica de conteo” y consiste en hacer cálculos mediante unas cajitas de análisis.

1° elemento	**2° elemento**	**3° elemento**	**Total**
¿Cuántos elementos dispongo para escoger uno de ellos como primer elemento?	¿Cuántos elementos dispongo para escoger uno de ellos como segundo elemento, dado que ya use uno como primer elemento?	¿Cuántos elementos dispongo para escoger uno de ellos como tercer elemento, dado que ya use uno para el primero y uno para el segundo?	La respuesta es la multiplicación de las tres casillas anteriores.
Para la 1° franja dispongo de 3 colores	Para la 2° franja dispongo de 2 colores, porque ya usé uno.	Para la 3° franja dispongo de 1 color, porque ya usé dos.	Total 3×2×1=6

Ejemplo 2: ¿Cuántos arreglos diferentes de 3 elementos puedo formar con las letras de las vocales?			a e i o u
1° Vocal	2° Vocal	3° Vocal	Total
5 opciones	4 opciones	3 opciones	5×4×3=60

Ejemplo 3: ¿Cuántos arreglos diferentes de 4 elementos, puedo formar con las letras A, M, O, R, si no se permite repetición?

1° Letra	2° Letra	3° Letra	4° Letra	Total
4 opciones	3 opciones	2 opciones	1 opción	4×3×2×1=24

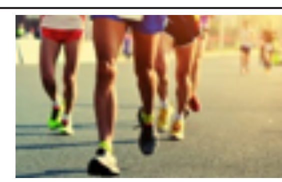
Cuando tengo una multiplicación en forma descendente desde un número "n" por todos sus antecesores hasta llegar al 1, entonces tengo un número factorial, el cual represento como *n!*

Por ejemplo:	Y hay casos especiales:
6! = 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 720 5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120 4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24 3! = 3 × 2 ×1 = 6 2! = 2 × 1 = 2	1! = 1 0! = 1

En los casos en los que se me pide la cantidad de arreglos que puedo formar con los todos los elementos de un conjunto, usándolos todos y sin repetición, aplico el número factorial como respuesta.

Ejemplo 4: En el caso de las banderas, como voy a utilizar los tres colores sin repetir ninguno, la respuesta es 3! = 6

Ejemplo 5: En el caso de las letras A, M, O, R, como voy a utilizar las cuatro y sin repetición, la respuesta es: 4! = 24.

Ejemplo 6: ¿De cuántas formas pueden quedar ordenados los lugares en una carrera donde participan 6 corredores?						 Recuperado de: https://goo.gl/QvYUTC
1° lugar	2° lugar	3° lugar	4° lugar	5° lugar	6° lugar	Total
6 opciones	5 opciones	4 opciones	3 opciones	2 opciones	1 opciones	6×5×4×3×2×10 =720

A los arreglos en los que el orden de los elementos hacen que las selecciones sean diferentes, (por ejemplo si tengo el número 2 y el número 4, no es lo mismo 42 que 24), les llamo "permutaciones", las que represento como: $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ejemplo 7: ¿Cuántos arreglos con tres de las cinco vocales puedo hacer sin repetición de vocales? A continuación hago el detalle:

AEI	AOE	EAI	EIA	IAE	IOA	OAE	OIA	UAE	UIA
AEO	AOI	EAO	EIO	IAO	IOE	OAI	OIE	UAI	UIE
AEU	AOU	EAU	EIU	IAU	IOU	OAU	OIU	UAO	UIO
AIE	AUE	EOA	EOA	IEA	IUA	OEA	OUA	UEA	UOA
AIO	AUI	EOI	EOI	IEO	IUE	OEI	OUE	UEI	UOE
AIU	AUO	EOU	EOU	IEU	IUO	OEU	OUI	UEO	UOI

Pero si este problema cumple con la condición de que el orden de los elementos hace la diferencia entre los arreglos, entonces, es una permutación y basta con aplicar la fórmula.

- Cantidad de elementos posibles: n=5
- Cantidad de elementos que me interesan: r=3
- No se permite la repetición de elementos en un mismo arreglo.
- El orden de los elementos si es importante ya que por ejemplo, el arreglo "AEI" es diferente al arreglo "AIE". Por tanto, es una permutación.

Fórmula: $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\qquad 5P3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = \mathbf{60}$

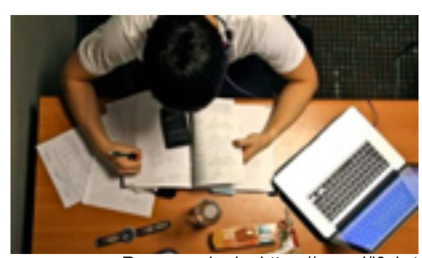
Ejemplo 8: Calculo las siguientes permutaciones:

$$7P3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{5040}{24} = \mathbf{210}$$

$$4P1 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = \mathbf{4}$$

Ejemplo 9: ¿Cuántos arreglos diferentes de 4 letras puedo obtener con la palabra "estudio", si no se permite repetir las letras en cada arreglo?

$$7P4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = \mathbf{840}$$



Recuperado de: https://goo.gl/i8yiwt

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido a usar el método de conteo de cajitas		
He aprendido qué es un número factorial		
He aprendido a utilizar la fórmula de las permutaciones.		
He aprendido a solucionar problemas utilizando permutaciones		

PRACTICO

Resuelvo los siguientes problemas:

1 En un consultorio hay 9 pacientes y 5 sillas. ¿De cuántas maneras podrían ordenarse en las sillas?

2 Tengo 3 floreros de diferentes colores. ¿De cuántas maneras los puedo ordenar en una repisa?

3 ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 6 alumnos para un baile folklórico?

4 ¿Cuántas claves de 3 dígitos puedo formar utilizando solamente el 2, 4, 5 y 7, sabiendo que no puedo repetir los números?

APLICO

1. Mientras hago la fila para tomar el transporte público, o en el comedor, realizo el cálculo de cuántas maneras diferentes puedo ordenar cinco personas que estén antes o después de mí.

2. Hago un dibujo en mi cuaderno de los distintos caminos que hay de mi casa al parque más cercano. Calculo cuántas son las formas posibles de hacer ese recorrido.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El valor de la permutación 8P5 es:							
A	360	B	13,440	C	6,720	D	40,320
2. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 6, 7 y 8?							
A	x=9	B	x=16	C	x=101	D	x=120

Respuesta: 1C; 2D

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1. 15,120 maneras
2. 6 maneras
3. 720 formas
4. 24 claves

LECCIÓN 3.2. COMBINACIONES.

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve con seguridad problemas que involucren combinaciones.

SABERES PREVIOS:

¿De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol, teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta que la portería?

¿Cómo se calcula el número de permutaciones de un conjunto de n elementos?

Recuperado de: https://goo.gl/i8yiwt

APRENDO

Si en la clínica estamos esperando 4 personas y hay 3 sillas, las cuales están colocadas de manera que definen el orden en que vamos a pasar consulta. ¿De cuántas formas diferentes nos podemos ordenar?

Recuperado de: https://goo.gl/rjgLT7

Si aplico la fórmula de las permutaciones, obtengo: $4P3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \mathbf{24}$

Hay 24 maneras posibles de ubicarnos. En este caso el orden en que estemos sentados es muy importante.

Pero ¿Qué pasa cuando no me interesa especificar un orden, y da igual en la posición que se encuentren los elementos? Por ejemplo, si los pacientes fueran llamados por cita y no por la posición de la silla en la que estén sentados.

Eso es una “combinación”, y la represento como $nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ o también como $\binom{n}{r}$. La diferencia principal con una permutación es que en la combinación el orden en que estén los elementos no importa; ya que si son los mismos elementos, entonces es la misma combinación.

Ejemplo 1: ¿Cuántos equipos de trabajo diferentes puedo formar, si tengo 10 personas y los equipos deben ser de 6 integrantes?


Recuperado de: https://goo.gl/hYYqSJ

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\,(10-6)!} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\times9\times8\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}\times4\times3\times2\times1} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = \frac{5040}{24} = 210$$

Puedo formar 210 equipos diferentes.


Recuperado de: https://goo.gl/6CSeyV

Ejemplo 2: ¿Cuántos licuados diferentes puedo hacer si tengo piña, fresas, guineos y melones, si solo puedo usar dos frutas a la vez?

$$4C2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}\times2\times1} = \frac{4\times3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

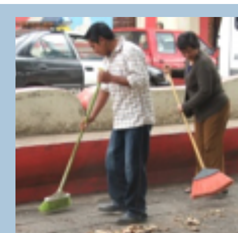
Puedo hacer 6 licuados diferentes.

Ejemplo 3. El profesor de 8° grado tiene 22 alumnos y necesita elegir 6 para que participen en la escolta de la bandera el 15 de septiembre. ¿De cuántas maneras los puede elegir?

$$22C6 = \frac{22!}{6!\,(22-6)!} = \frac{22!}{6!\,16!} = \frac{22\times21\times20\times19\times18\times17\times\cancel{16!}}{6!\,\cancel{16!}}$$

$$= \frac{53721360}{720} = 74{,}613 \text{ formas}$$

Ejemplo 4: Calculo el número de combinaciones posibles, si tengo 6 personas y de entre ellas voy a formar comités de limpieza de 4 integrantes.



$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}\times2\times1} = \frac{6\times5}{2\times1} = \frac{30}{2} = 15\ comités$$

Ejemplo 5: Las diagonales de un polígono se obtienen uniendo pares de vértices no adyacentes. ¿Cuántas diagonales tiene un heptágono?

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\times6\times\cancel{5!}}{2\times\cancel{5!}} = \frac{7\times6}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

A este resultado le quito las 7 uniones que van entre vértices consecutivos, entonces, el número de diagonales es 21-7=14

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido cuál es la diferencia entre permutación y combinación		
He aprendido la notación de las combinaciones		
He aprendido a aplicar la fórmulas de las combinaciones		

PRACTICO

Resuelvo los siguientes problemas:

1. Un grupo de 9 amigos tienen 6 boletos para la entrada de un concierto. ¿De cuántas maneras pueden repartirse las entradas?

2. En una sección de una fábrica hay 10 operarios. ¿De cuántas maneras pueden elegirse equipos de 4 para trabajar el turno de la noche?

3. Un alumno que está haciendo un examen, puede elegir 8 preguntas de las 12 posibles. ¿De cuántas formas puede hacer la elección?

4. ¿De cuántas maneras se pueden combinar los 7 colores del arcoiris si se eligen de tres en tres?

5. Necesito elegir 4 colores de pintura, de una fila que tiene 9 colores diferentes. ¿De cuántas formas puedo elegirla?

APLICO

1. Investigo cuántas personas hay en total en mi comunidad y establezco cuántas equipos de 10 personas diferentes se pueden formar.
2. De cuántas manera puede elegir a los 11 jugadores, el entrenador del equipo de fútbol de mi colonia, si en total cuenta con 16 personas.
3. Observo el entorno y determino dos situaciones más en las que se pueden utilizar las combinaciones.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El valor de la combinación 7C2 es:							
A	1,008	B	5,040	C	21	D	42
2. ¿De cuántas maneras puede formarse un comité de limpieza de 5 integrantes, si hay 8 voluntarios?							
A	28	B	56	C	336	D	40,320

Respuesta: 1C; 2B

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1. 84 maneras
2. 210 equipos
3. 495 formas
4. 35 maneras
5. 126 formas

LECCIÓN 3.3. TRIÁNGULO DE PASCAL.

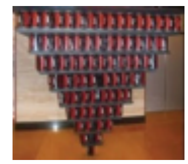
INDICADOR DE LOGRO:

Construye con orden y aseo el Triángulo de Pascal hasta n = 9.

SABERES PREVIOS:

- ¿A qué figura geométrica se asemejan las imágenes presentadas?
- ¿Cómo se calcula una combinación?

Recuperado de:
https://goo.gl/vfXx4N



APRENDO

Es muy común observar en el supermercado que ubiquen latas y cajas en la forma presentada en la imagen anterior.

¿Se me ocurre alguna manera de acomodar números y ordenarlos de esa manera?
Hace muchos años fue descubierto un triángulo formado de números, que tiene características muy especiales.

Le llamo "Triángulo de Pascal" a una secuencia de números que acomodo de una manera, que entre más sea la cantidad de números, más va tomando la forma de un triángulo, siguiendo una condición especial.

Para construirlo primero debo colocar tres "unos" formando un triángulo.	1 1 1
La condición es que después de colocar la segunda fila de números, la tercera se forma colocando al principio el "uno" y luego el "dos", que es suma de los dos "unos" que están justamente sobre él y, al final otro "uno".	1 1 1 1 2 1
Para la cuarta fila, sigo el mismo procedimiento anterior, recordando que debo comenzar y terminar siempre con "uno".	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1

Y de igual manera y sucesivamente construyo las siguientes filas.	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 1 6 15 20 15 6 1 1 7 21 35 35 21 7 1 1 8 28 56 70 56 28 8 1 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Lo interesante del triángulo viene cuando estudio en detalle los números combinatorios.

Cuando tengo *n* = 0: - El número de formas de elegir los elementos de un conjunto que no tiene elementos es 1.
$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,(0-0)!} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$
Cuando tengo *n* = 1: - El número de formas de elegir los elementos de un conjunto que solo tiene 1 elemento es 1.
$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!\,(1-0)!} = \frac{1!}{0!\,1!} = 1$ $\qquad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!\,(1-1)!} = \frac{1!}{1!\,0!} = 1$
Cuando tengo *n* = 2: - El número de formas de elegir ningún elemento de un conjunto que tiene 2 elementos es 1. - El número de formas de elegir 1 elemento de un conjunto que tiene 2 elementos es 2. - El número de formas de elegir 2 elementos de un conjunto que tiene 2 elementos es 1.
$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!\,(2-0)!} = \frac{2!}{0!\,2!} = 1$ $\quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$ $\quad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!} = \frac{2!}{2!\,0!} = 1$
Cuando tengo n=3: - El número de formas de elegir ningún elemento de un conjunto que tiene 3 elementos es 1. - El número de formas de elegir 1 elemento de un conjunto que tiene 3 elementos es 3. - El número de formas de elegir 2 elementos de un conjunto que tiene 3 elementos es 3. Y así sucesivamente…
$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{3!}{0!\,3!} = 1$ $\qquad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{6}{1\times 2} = \frac{6}{2} = 3$ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2\times 1} = \frac{6}{2} = 3$ $\qquad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{3!}{3!\,0!} = 1$

Cuando tengo n = 4:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{4!}{0!\,4!} = 1 \qquad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{2\times 2} = \frac{24}{4} = 6 \qquad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$$

Observo que el resultado de los números combinatorios coincide con los valores del Triángulo de Pascal.

Por tanto, al sustituir los valores por sus respectivos combinatorios, el triángulo me quedaría:

$$\begin{array}{ll}
n = 0 & \binom{0}{0} \\
n = 1 & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
n = 2 & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
n = 3 & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
n = 4 & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
\end{array}$$

Y así sucesivamente hasta el “n” que sea necesario. La ventaja que me ofrece esta forma de escritura del triángulo, es que no necesito conocer los números anteriores para encontrar la última fila.

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido cómo se construye el “Triángulo de Pascal”		
He aprendido la relación de un número combinatorio con el “Triángulo de Pascal”		
He aprendido a obtener una fila del Triángulo de Pascal sin necesidad de obtener las filas anteriores, usando el número combinatorio.		

PRACTICO

Verifico que al calcular los valores de las filas 8 y 9 aplicando números combinatorios, obtengo los resultados que ya fueron dados en el triángulo

APLICO

1. Elaboro un pequeño mural, en el que utilizando la disposición de los ladrillos, simulen el triángulo de pascal, con el reto de llegar a n= 10 de ser posible.
2. Elijo 5 lápices de colores diferentes. Formo los grupos posibles cuando de los 5 colores tomo 0,1, 2, 3, 4 y 5 colores. Calculo el valor de los combinatorios y comparo los resultados.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. ¿Cuántos números tiene la fila 11 del Triángulo de Pascal?							
A	10	B	11	C	12	D	13
2. Cuando n=8 ¿cuál es el combinatorio que se ubica en medio de la fila?							
A	$\binom{8}{5}$	$\binom{4}{8}$	$\binom{5}{8}$	C	$\binom{8}{4}$	D	

Respuesta: 1C; 2A

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

Para n= 8:

$\binom{8}{0} = 1$	$\binom{8}{1} = 8$	$\binom{8}{2} = 28$	$\binom{8}{3} = 56$
$\binom{8}{4} = 70$	$\binom{8}{5} = 56$	$\binom{8}{6} = 28$	$\binom{8}{7} = 8$
$\binom{8}{9} = 1$			

Para n= 9:

$\binom{9}{0} = 1$	$\binom{9}{1} = 9$	$\binom{9}{2} = 36$	$\binom{9}{3} = 84$
$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{5} = 126$	$\binom{9}{6} = 84$	$\binom{9}{7} = 36$
$\binom{9}{8} = 9$	$\binom{9}{9} = 1$		

LECCIÓN 3.4. BINOMIO DE NEWTON.

INDICADOR DE LOGRO:

Aplica con perseverancia el Binomio de Newton para obtener la potencia de un binomio.

SABERES PREVIOS:

Si el área del monumento es $A=(x+10)^2$. ¿Cuál es la expresión desarrollada que representa a esta área?

- ¿Cuál es el desarrollo del binomio $(a+b)^2$?
- ¿Recuerdo cuál es el desarrollo del binomio $(a+b)^3$?

Recuperado de:
https://goo.gl/zxbfkQ

APRENDO

$(x+5)^3$ $(2x-1)^5$ $(3-y)^7$ $(3m+2n)^6$

Cuando tengo el binomio $(a+b)^2$, debo recordar que el cuadrado me indica que debo multiplicar $(a+b)$ por $(a+b)$.

Si desarrollo la multiplicación del cuadrado del binomio, queda como: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \quad\;\; \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Lo que también puedo obtener por la regla del producto notable: "El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble producto de la primera por la segunda cantidad, más el cuadrado de la segunda"

Y, por productos notables, también puedo desarrollar: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cuando la potencia del binomio es mayor, por ejemplo $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, entonces debo aplicar la multiplicación de binomios.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Al poner atención en los coeficientes de cada término del desarrollo, me doy cuenta que coinciden con los números del "Triángulo de Pascal", los que a su vez son números combinatorios.

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}4ab^3 + \binom{4}{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6$$

En general…. Si tengo el binomio elevado a la potencia “n”, su desarrollo lo represento así:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

A esta expresión la llamo “Binomio de Newton” y me sirve para encontrar el desarrollo de potencias con números grandes. Esta es la importancia que tiene, facilitar el desarrollo de binomios elevados a cualquier potencia.

Ejemplo 1: Desarrollo los primeros tres términos del binomio: $(a+b)^{15}$

$$(a+b)^{15} = \binom{15}{0}a^{15} + \binom{15}{1}a^{14}b + \binom{15}{2}a^{13}b^2 + \cdots$$

$$(a+b)^{15} = a^{15} + 15a^{14}b + 105a^{13}b^2 + \cdots$$

En el desarrollo del binomio, puedo observar las siguientes características:

• El primer término del desarrollo tiene el exponente igual al binomio. Ejemplo: a^{15}…

• Los exponentes de la primera cantidad, van disminuyendo de uno en uno. Ejemplo: a^{15},a^{14},a^{13},a^{12},a^{11},etc

• Los exponentes de la segunda cantidad, van aumentando de uno en uno. Ejemplo: *b^0 (como es igual a uno,no se escribe), b^1 (solo se escribe "b"),b^2,b^3,b^4,etc*

• El último término del desarrollo tiene exponente igual al binomio. Ejemplo: …b^{15}

El número combinatorio que acompaña a cada término puede formarse así:

$$\left(\frac{exponente\ del\ binomio}{exponente\ de\ la\ segunda\ cantidad}\right).$$ Ejemplo …+ $\binom{15}{2}a^{13}b^2 + \cdots$

Si me interesa un término específico, utilizo la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Ejemplo 2: Encuentro el sexto término del desarrollo del binomio $(a+b)^{14}$

Exponente de binomio "n":	14
Termino "r" a encontrar:	6
Exponente de la primera cantidad en base a "n-r+1":	14 - 6 + 1 = 9
Exponente de la segunda cantidad en base a "r-1":	6 - 1 = 5
Sexto término: $\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$	$\ldots+\binom{14}{5}a^9b^5+\cdots$

Ejemplo 3: Encuentro el décimo término del desarrollo del binomio $(a+b)^{20}$

Exponente de binomio "n":	20
Termino "r" a encontrar:	10
Exponente de la primera cantidad en base a "n-r+1":	20 - 10 + 1 = 11
Exponente de la segunda cantidad en base a "r-1":	10 - 1 = 9
Sexto término: $\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$	$\ldots+\binom{20}{9}a^{11}b^9+\cdots$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido qué es el binomio de Newton		
He aprendido cómo desarrollar la potencia de un binomio		
He aprendido a aplicar la fórmula para encontrar un término cualquiera.		

PRACTICO

Encuentro el término del Binomio de Newton indicado

1 El quinto término del desarrollo del binomio $(a+b)^8$

2 El noveno término del desarrollo del binomio $(a+b)^{12}$

3 El tercer término del desarrollo del binomio $(a+b)^{16}$

APLICO

Elaboro un cartel con el desarrollo del binomio $(a+b)^5$ y le coloco los coeficientes de un color diferente y llamativo para poderlo comparar con los coeficientes del triángulo de Pascal. Luego le explico a un amigo o compañero de trabajo, haciendo notar la importancia de la observación en la simplificación de procesos.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El tercer término del desarrollo del binomio $(a+b)^8$ es:							
A	$\binom{8}{3}a^6b^2$	B	$\binom{8}{3}a^5b^2$	C	$\binom{8}{2}a^5b^2$	D	$\binom{8}{2}a^6b^2$
2. El séptimo término del desarrollo del binomio $(a+b)^{14}$ es:							
A	$\binom{14}{7}a^7b^6$	B	$\binom{14}{6}a^7b^7$	C	$\binom{14}{6}a^8b^6$	D	$\binom{14}{7}a^8b^6$

Respuesta: 1D; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $70a^4 b^4$

2) $495a^4 b^8$

3) $120a^{12} b^2$

BIBLIOGRAFÍA

- Figueroa Escalón, R. y Morán Mendoza, D. (2013). Matemática 9°. San Salvador: Editorial Servicios Educativos.

UNIDAD 4: RADICACIÓN.

OBJETIVO

Aplicar con destreza la radicación y sus propiedades, al proponer soluciones a situaciones del ámbito escolar y social.

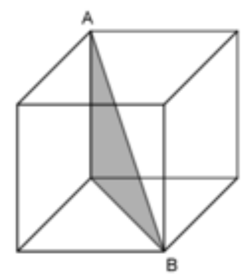
LECCIÓN 4.1. RADICACIÓN. EXPONENTE FRACCIONARIO.

INDICADOR DE LOGRO:

Convierte con interés y esmero expresiones con radicales a potencias con exponente fraccionarios y viceversa.

SABERES PREVIOS:

Si el cubo de la derecha mide un centímetro de arista, ¿Cuál es la longitud desde el vértice A al vértice B?
¿Cómo lo resolveré?
¿Qué conocimientos debo recordar para darle solución?



Doy solución a cada uno de los siguientes planteamientos:

$\sqrt{64} =$ $\sqrt{49} =$ $\sqrt[3]{27} =$ $\sqrt{81} =$ $\sqrt[3]{125} =$

¿De igual manera que los ejercicios anteriores puedo resolver $\sqrt[5]{1,024}$?

APRENDO

Para saber cuánto es $\sqrt[5]{1,024}$? , y no tengo calculadora, aplico mis conocimientos sobre la descomposición en factores primos, así:

1,024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Como $1{,}024 = 2^{10}$, por tanto $\sqrt[5]{1{,}024} = \sqrt[5]{2^{10}}$ y por las propiedades de la radicación, puedo resolver de la siguiente manera:

$$\sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{2^5 \times 2^5} = \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{2^5} = 2 \times 2 = \mathbf{2^2}$$

De similar manera puedo proceder si tengo que resolver $\sqrt[5]{a^{20}}$:

$$\sqrt[5]{a^{20}} = \sqrt[5]{a^5 \times a^5 \times a^5 \times a^5} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{2^5} = a \times a \times a \times a = \boldsymbol{a^4}$$

De donde puedo deducir que si divido el exponente entre el índice del radical, el cálculo del exponente de la respuesta es más práctico.

$$\sqrt[5]{a^{20}} = a^{\frac{20}{5}} = \boldsymbol{a^4}$$

A partir de los ejemplos anteriores, obtengo: $\boldsymbol{\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}}$ lo que le da origen al exponente fraccionario.

Cuando se presenta que la fracción no da como resultado un número entero, entonces realizo la división donde el dividendo es el exponente y el divisor el índice del radical, el cociente el exponente de lo que sale del radical y, el residuo el exponente de lo que queda dentro del radical.

Ejemplo 1: Simplifico $\sqrt[5]{h^{17}}$

Dividendo	17	5	Divisor
Residuo	2	3	Cociente

$$\sqrt[5]{h^{17}} = h^{\frac{17}{5}} = \boldsymbol{h^3 \sqrt[5]{h^2}}$$

Cuando el índice del radical no aparece, que el índice es 2 y recuerdo que cuando una cantidad no tiene exponente, asumo que es uno.

Ejemplo 2: Convierto $\sqrt{k}$ a potencia con exponente fraccionario.
Como el índice es dos y el exponente de “k” es uno, entonces:

$$\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 3: Convierto $\sqrt{5m^7}$ a potencia con exponente fraccionario.

$$\sqrt{5m^7} = \sqrt{5} \times \sqrt{m^7} = 5^{\frac{1}{2}} \times m^{\frac{7}{2}}$$

Ejemplo 4: Convierto $3^{\frac{4}{5}}\times5^{\frac{1}{5}}\times b^{\frac{6}{5}}\times c^{\frac{8}{5}}$ a expresión radical.

$$3^{\frac{4}{5}}\times5^{\frac{1}{5}}\times b^{\frac{6}{5}}\times c^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{3^4}\times\sqrt[5]{5}\times\sqrt[5]{b^6}\times\sqrt[5]{c^8} = \sqrt[5]{3^4\times5\times b^6\times c^8} = \sqrt[5]{405b^6c^8}$$

Al exponente fraccionario, le puedo aplicar todas las propiedades de las fracciones sin ningún problema, tales como la simplificación y la amplificación.

Ejemplo 5: Convierto la expresión $\sqrt[6]{8g^3}$ a exponente fraccionario y simplifico si es posible.

$$\sqrt[6]{8g^3} = \sqrt[6]{2^3g^3} = \sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{g^3} = 2^{\frac{3}{6}}\times g^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}\times g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\times\sqrt{g} = \sqrt{\mathbf{2g}} \quad \boldsymbol{R/}$$

En este ejemplo utilicé el concepto de simplificación de fracciones.

Ejemplo 6: Convierto la expresión $\sqrt[3]{7r^2s^5}$ a una raíz con índice 12.

$$\sqrt[3]{7r^2s^5} = (7r^2s^5)^{\frac{1}{3}} = (7r^2s^5)^{\frac{1\times4}{3\times4}} = (7r^2s^5)^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{(7r^2s^5)^4} = \sqrt[12]{\mathbf{2,401r^8s^{20}}} \quad R/$$

En este ejemplo utilicé el concepto de amplificación de fracciones.

Ejemplo 7: Convierto $7^{\frac{2}{7}}\times2^{\frac{3}{7}}\times h^{\frac{5}{7}}\times k^{\frac{4}{7}}$ a expresión con radical.

$$\sqrt[7]{7^2}\times\sqrt[7]{2^3}\times\sqrt[7]{h^5}\times\sqrt[7]{k^4} = \sqrt[7]{7^2\times2^3\times h^5\times k^4} = \sqrt[7]{392h^5k^4} \quad R/$$

Ejemplo 8: Convierto $3^{\frac{1}{6}}\times x^{\frac{5}{6}}\times y^{\frac{2}{6}}\times z^{\frac{3}{6}}$ a expresión con radical.

$$\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{x^5}\times\sqrt[6]{y^2}\times\sqrt[6]{z^3} = \sqrt[6]{3\times x^5\times y^2\times z^3} = \sqrt[6]{3x^5y^2z^3} \quad R/$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido cómo se origina el exponente fraccionario		
He aprendido a expresar un radical en su forma de exponente fraccionario.		
He aprendido a expresar un exponente fraccionario en su forma de radical.		
He aprendido a cambiar el valor de un índice por simplificación o amplificación.		

PRACTICO

1

Convierto a potencia con exponente fraccionario:

6) $\sqrt{3x^5}$ 7) $\sqrt[7]{9a^{16}b^8}$

2

Convierto a expresión radical:

$4^{\frac{2}{7}} \times a^{\frac{9}{7}}$

$2^{\frac{8}{3}} \times 7^{\frac{10}{3}} \times m^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{4}{3}}$

3

Convierto la expresión

$\sqrt[5]{4x^3y^8}$ a una raíz con índice 10.

APLICO

Necesito cercar un terreno rectangular, el ancho viene dado por $\sqrt[4]{2w^2}$ y el ancho es de $\sqrt[12]{8w^6}$, elaboro una maqueta para demostrar que el terreno es cuadrado, detallando a un lado el procedimiento seguido por la conversión a exponente fraccionario.

Observo mi entorno e identifico alguna situación donde se utilice expresiones con radicales o expresiones con exponente fraccionario, lo copio en mi cuaderno y luego realizo la conversión correspondiente.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. Al convertir la expresión $\sqrt[6]{256x^4}$ a exponente fraccionario y simplificar, el resultado es:							
A	$\sqrt{4x^2}$	B	$\sqrt[3]{4x}$	C	$\sqrt{16x}$	D	$\sqrt[3]{16x^2}$
2. Un ingeniero ha determinado que el precio de un artículo se puede calcular con la expresión $\sqrt[15]{32x^5}$, siendo x el costo de fabricación. ¿Cuál es la forma más simple para representar esta expresión?							
A	$\sqrt[3]{2x}$	B	$\sqrt[3]{4x}$	C	$\sqrt[3]{4x^2}$	D	$\sqrt[3]{2x^2}$

Respuesta: 1D; 2A

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1.1) $3^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{5}{2}}$

1.2) $3^{\frac{2}{7}}\times a^{\frac{16}{7}}\times b^{\frac{8}{7}}$

2.1) $a\sqrt[7]{16a^2}$

2.2) $1{,}372p\sqrt[3]{28m^2p}$

3) $\sqrt[10]{16x^6y^{16}}$

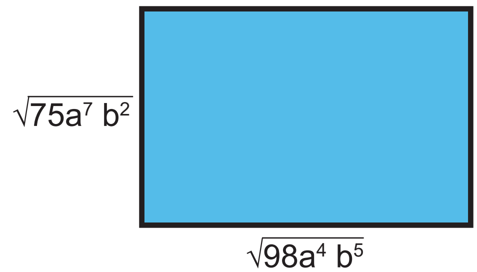
LECCIÓN 4.2. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

INDICADOR DE LOGRO:

Extrae con seguridad factores de un radical.

SABERES PREVIOS:

- Observo en el siguiente rectángulo las medidas de sus lados
- ¿De qué otra manera puedo expresar esas medidas?
- ¿Recuerdo qué es la radicación?



Nuevamente observo las medidas del rectángulo anterior, si me dicen que calcule su perímetro, lo analizo y considero que para poder realizarlo me hace falta conocer algo más.

APRENDO

La simplificación de radicales me permite poder hacer reducción por medio de suma o resta, de expresiones radicales que a simple vista parecen que no pueden reducirse.

La descomposición de factores me es útil para poder aplicar la simplificación; sin embargo, el saber manejar la propiedad de los exponentes fraccionarios, me permite resolver de manera rápida.

Observo el siguiente ejemplo resuelto de dos maneras, en uno aplicando la conversión de radical a exponente fraccionario y, en el segundo por propiedades de los exponentes.

Ejemplo 1: Simplifico $\sqrt[5]{h^{17}}$

- Por propiedades de los exponentes y distribución de radicales:

$$\sqrt[5]{h^{17}} = \sqrt[5]{h^5 \times h^5 \times h^5 \times h^2} = \sqrt[5]{h^5} \times \sqrt[5]{h^5} \times \sqrt[5]{h^5} \times \sqrt[5]{h^2} = h \times h \times h \times \sqrt[5]{h^2} = \boldsymbol{h^3 \sqrt[5]{h^2}}$$

- Por propiedades de los exponentes fraccionarios:

Dividendo	17	5	Diviso
Residuo	2	3	Cociente

$$\sqrt[5]{h^{17}} = h^{\frac{17}{5}} = \boldsymbol{h^3 \sqrt[5]{h^2}}$$

Ejemplo 2: Simplifico $\sqrt[3]{256w^{11}}$

- Por propiedades de los exponentes y distribución de radicales:

$2^{\frac{8}{3}} = 2^2\sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$ $w^{\frac{11}{3}} = w^3\sqrt[3]{w^2}$

2 2 3

Por propiedades de los exponentes fraccionarios:

$$\sqrt[3]{256w^{11}} = \sqrt[3]{2^8w^{11}} = 2^{\frac{8}{3}}\times w^{\frac{11}{3}} = \mathbf{4w^3\sqrt[3]{4w^2}}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \qquad 2^{\frac{8}{3}} = 2^2\sqrt[3]{2^2} = \mathbf{4\sqrt[3]{4}} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \qquad w^{\frac{11}{3}} = \mathbf{w^3\sqrt[3]{w^2}}$$

En la práctica, hacer la división de los exponentes entre el índice, lo hago de manera directa teniendo cuidado de que el cociente es el exponente de lo que sale del radical y el residuo es el exponente de lo que se queda dentro del radical. Considero que este proceso es más corto y fácil; pero yo decido cuál utilizar.

Ejemplo 3: Simplifico $\sqrt[4]{81a^5b^7c^{10}d^{19}}$ descomponiendo en factores:

$$\sqrt[4]{81a^5b^7c^{10}d^{19}} = \sqrt[4]{3^4a^5b^7c^{10}d^{19}} = \sqrt[4]{3^4a^4b^4c^8d^{16}ab^3c^2d^3} = \mathbf{3abc^2d^4\sqrt[4]{ab^3c^2d^3}} \quad \boldsymbol{R/}$$

Ejemplo 4: Simplifico $\sqrt[5]{32x^6y^5}$ descomponiendo en factores:

$$\sqrt[5]{32x^6y^5} = \sqrt[5]{2^5x^6y^5} = \sqrt[5]{2^5x^5y^5x} = \mathbf{2xy\sqrt[5]{x}} \quad \boldsymbol{R/}$$

Ejemplo 5: Simplifico $\sqrt[7]{2187w^{10}z^{12}}$ descomponiendo en factores:

$$\sqrt[7]{2187w^{10}z^{12}} = \sqrt[7]{3^7w^7w^3z^7z^5} = \mathbf{3wz\sqrt[7]{w^3z^5}} \quad \boldsymbol{R/}$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He recordado la simplificación de radicales.		
He aplicado la propiedad del exponente fraccionario para simplificar.		
He comprendido cómo extraer los factores de un radical.		

PRACTICO

Simplifico

1	$\sqrt[4]{x^9 y^{12}}$	**2**	$\sqrt{36x^8 y^6 z^{14}}$	**3**	$\sqrt{25x^7 y^4 z^9}$
4	$\sqrt[4]{64a^6 b^9 c^{12} d^2}$	**5**	$\sqrt[4]{90000m^8 n^7 p^9 q^2}$		

APLICO

Trabajo en mi cuaderno las siguientes actividades:

1. Investigo las medidas del terreno del centro escolar y expreso sus medidas en forma de radicales semejantes para poder establecer el perímetro y el área. Detallo las operaciones de suma para el perímetro y del producto para el área con las expresiones simplificadas a manera de ejemplo y lo comparto con un amigo o vecino.

2. Tomo las medidas de la puerta de mi casa y realizo la actividad similar a la anterior.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

3. La simplificación de la expresión $\sqrt[3]{64a^6 b^9 c^3}$ es:							
A	$\sqrt[3]{64a^2 b^3 c}$	B	$\sqrt[3]{4a^2 b^3}$	C	$4a^2 b^3 c$	D	$4c\sqrt[3]{a^2 b^3}$
4. La simplificación de la expresión $\sqrt[5]{8640m^{12} n^8 p^5 q^7}$ es:							
A	$2m^2 npq\sqrt[5]{270m^2 n^3 q^2}$	B	$2m^2q\sqrt[5]{270m^2}$	C	$m^2nq5\sqrt{270m^2n^3q^2}$	D	$2m^2npq$

Respuesta: 1C; 2A

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $x^2 y^3 \sqrt[4]{x}$

2) $6x^4 y^3 z^7$

3) $5x^3 y^3 z^4 \sqrt{xz}$

4) $2abc^2 \sqrt{5\&2ab^4 c^2 d^2}$

5) $10m^2 n^2 p^3 \sqrt{90m^2 nq^2}$

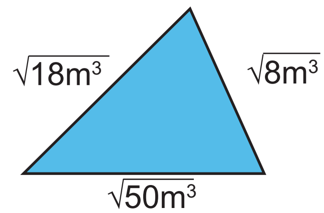
LECCIÓN 4.3. RADICALES SEMEJANTES

INDICADOR DE LOGRO:

Identifica y reduce con seguridad radicales semejantes.

SABERES PREVIOS:

- ¿Cómo encontrar el perímetro del siguiente triángulo?
- Planteo la operación a realizar.
- ¿Cuál es el primer paso que debo realizar?



Para poder calcular el perímetro del triángulo anterior, es necesario tener otros conocimientos:

APRENDO

Dos expresiones con radicales son semejantes si tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

Posiblemente, a simple vista, los radicales no parecen semejantes; pero al aplicar la simplificación, puedo encontrar que sí lo son.

Ejemplo 1. Realizo la reducción de cada uno de los siguientes radicales para comprobar si son semejantes: $\sqrt{8m^3}$,$\sqrt{50m^3}$,$\sqrt{18m^3}$

$$\sqrt{8m^3} = \sqrt{2^3m^3} = \sqrt{2^2m^2\times 2m} = \mathbf{2m\sqrt{2m}}$$

$$\sqrt{50m^3} = \sqrt{2\times 5^2m^3} = \sqrt{5^2m^2\times 2m} = \mathbf{5m\sqrt{2m}}$$

$$\sqrt{18m^3} = \sqrt{2\times 3^2m^3} = \sqrt{3^2m^2\times 2m} = \mathbf{3m\sqrt{2m}}$$

R// Sí son semejantes porque tiene la misma raíz y la misma cantidad subradical.

Ejemplo 2: Compruebo si los siguientes son radicales semejantes: $26a\sqrt[3]{b^7}$ y $-65\sqrt[3]{a^3b^7}$

Al simplificar los radicales obtengo:

$$26a\sqrt[3]{b^7} = 26ab^2\sqrt[3]{b} \qquad -65\sqrt[3]{a^3b^7} = -65ab^2\sqrt[3]{b}$$

R// Sí son semejantes

Ejemplo 3: Compruebo si los siguientes son radicales semejantes: $2x\sqrt[4]{z^3}$ y $8x\sqrt[12]{z^9}$

Al simplificar los radicales obtengo:

$$2x\sqrt[4]{z^3} = 2xz^{\frac{3}{4}} \qquad 8x\sqrt[12]{z^9} = 8xz^{\frac{9}{12}} = 8xz^{\frac{3}{4}}$$

R// Sí son semejantes

Ejemplo 4: Reduzco las siguientes expresiones: $5\sqrt[3]{b^6c^5} + 10\sqrt[3]{b^6c^5} - 8\sqrt[3]{b^6c^5} - \sqrt[3]{b^6c^5}$

$$5\sqrt[3]{b^6c^5} + 10\sqrt[3]{b^6c^5} - 8\sqrt[3]{b^6c^5} - \sqrt[3]{b^6c^5} = (5 + 10 - 8 - 1)\sqrt[3]{b^6c^5} = 9\sqrt[3]{b^6c^5}$$

Ejemplo 5: Reduzco: $7\sqrt{mn^5p^7} - 4\sqrt[3]{mn^5p^7} - 3n^2p^3\sqrt{mnp} + np^2\sqrt[3]{mn^2p}$

Simplifico $7\sqrt{mn^5p^7}$:

$$= 7n^2p^3\sqrt{mnp}$$

Simplifico $-4\sqrt[3]{mn^5p^7}$:

$$= -4np^2\sqrt[3]{mn^2p}$$

$$7\sqrt{mn^5p^7} - 4\sqrt[3]{mn^5p^7} - 3n^2p^3\sqrt{mnp} + np^2\sqrt[3]{mn^2p}$$

$$= 7n^2p^3\sqrt{mnp} - 4np^2\sqrt[3]{mn^2p} - 3n^2p^3\sqrt{mnp} + np^2\sqrt[3]{mn^2p}$$

$$= 7n^2p^3\sqrt{mnp} - 3n^2p^3\sqrt{mnp} - 4np^2\sqrt[3]{mn^2p} + np^2\sqrt[3]{mn^2p}$$

$$= 4n^2p^3\sqrt{mnp} - 3np^2\sqrt[3]{mn^2p}$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He recordado la simplificación de radicales.		
He recordado cómo identificar cuando dos radicales son semejantes		
He aprendido a reducir radicales semejantes, teniendo cuidado en la simplificación		

PRACTICO

Simplifico

1

1. Compruebo si los siguientes son radicales semejantes:

$3\sqrt{a^5b^3}$ y $\sqrt{a^7b^5c^2}$

$\sqrt[3]{125x^5y^4z}$ y $-2\sqrt[3]{x^8yz^{10}}$

$\sqrt[4]{81m^6n^{11}}$ y $6\sqrt[4]{m^8n^7}$

$8m\sqrt{3m}$; $4x\sqrt{27m^3}$ y $3w\sqrt{48m^5}$

1) $5h\sqrt{a^3b^5c^7}$; $8n\sqrt{a^5b^3c}$; $12m\sqrt{a^7bc^3}$ y $4h\sqrt{abc}$

2

Reduzco las siguientes expresiones:

$15\sqrt[3]{x^4} - 7\sqrt[3]{x^4}$

$24\sqrt[7]{m^5} - 10\sqrt[7]{m^5} + 3\sqrt[7]{m^4}$

$\sqrt{a^2bc^3} + 5\sqrt{a^2bc^3} - 9\sqrt{a^2bc^3} + 3\sqrt{a^2bc^3}$

$-6\sqrt[5]{2xyz} - 3\sqrt[4]{3x^2yz} + 5\sqrt[5]{2xyz} - \sqrt[4]{3x^2yz}$

a) $2x^2y\sqrt{xy} + 5\sqrt{xy} - 3x^2y\sqrt{xy} - 7\sqrt{xy}$

APLICO

Realizo las siguientes actividades:

1. Esta actividad la realizo en mi cuaderno: Tomo las medidas de una de las ventanas que hay en mi casa, las expreso como radicales, planteo cómo encontrar el perímetro y área de dicha ventana, luego resuelvo.

2. Elaboro una colección de 20 tarjetitas, de manera que formen parejas de radicales semejantes y, jugar con ellas con las reglas de un juego de memoria. Coloco las 20 tarjetitas boca abajo; luego volteo un par. Si ambos son semejantes es punto para mí y las retiro del grupo; si no las volteo de nuevo y es turno del segundo jugador.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. Es la expresión semejante al radical $2x^3 y^5 \sqrt[3]{x^2 y}$							
A	$\sqrt[3]{8x^5 y^6}$	B	$\sqrt[3]{8x^{11} y^{16}}$	C	$2\sqrt[3]{x^5 y^6}$	D	$\sqrt[3]{4x^{11} y^{16}}$
2. Al reducir las expresiones $\sqrt{4m^4 n^7 p} + 4mn\sqrt{np} - 5m^2 n^3 \sqrt{np}$ Obtengo:							
A	$-4m^2 n^3 \sqrt{np} + 4mn\sqrt{np}$	B	$-3m^2 n^3 \sqrt{np}$	C	$-10m^2 n^3 \sqrt{np}$	D	$-3m^2 n^3 \sqrt{np} + 4mn \sqrt{np}$

Respuesta: 1B; 2D

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1.1) Si son radicales semejantes al simplificarlos.
1.2) Si son radicales semejantes al simplificarlos.
1.3) No son radicales semejantes al simplificarlos.
1.4) Si son radicales semejantes al simplificarlos.
1.5) Si son radicales semejantes al simplificarlos.

2 a) $8\sqrt[3]{x^4}$
2 b) $14\sqrt[7]{m^5} + 3\sqrt[7]{m^4}$
2 c) 0
2 d) $-\sqrt[5]{2xyz} - 4\sqrt[4]{3x^2 yz}$
2 e) $(-x^2 y-2)\sqrt{xy}$

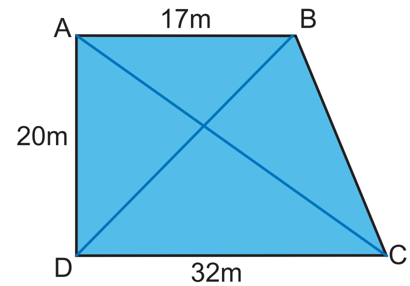
LECCIÓN 4.4. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR RADICACIÓN.

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve problemas utilizando radicales y sus operaciones, con perseverancia y orden.

SABERES PREVIOS:

- Me piden que haga una división en cuatro partes de un terreno como el de la figura. Para ello basta con atravesar un cerco de alambre por las diagonales.
- ¿Qué procedimiento debo aplicar para encontrar la longitud de cada diagonal?
- ¿Cómo realizo la suma de las dos diagonales?



Si tengo un problema sobre cálculos de perímetros y el teorema de Pitágoras es una de las alternativas que puedo utilizar, los resultados pueden ser expresiones con radicales.

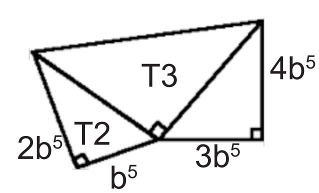
APRENDO

Dos expresiones con radicales son semejantes si tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

Ejemplo 1: Encontrar el valor del perímetro del triángulo rectángulo T3, en base a los lados de los triángulos T1 y T2. Para ello aplico el Teorema de Pitágoras:

"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

$h^2=a^2+b^2$



- Encuentro la hipotenusa de T1:

$$(h_1)^2 = \left(2b^5\right)^2 + \left(b^5\right)^2$$

$$(h_1)^2 = 4b^{10} + b^{10}$$

$$(h_1)^2 = 5b^{10}$$

$$h_1 = \sqrt{5b^{10}}$$

$$h_1 = b^5\sqrt{5}$$

- Encuentro la hipotenusa de T2:

$$(h_2)^2 = \left(3b^5\right)^2 + \left(6b^5\right)^2$$

$$(h_2)^2 = 9b^{10} + 36b^{10}$$

$$(h_2)^2 = 45b^{10}$$

$$h_2 = \sqrt{5 \times 3^2 \times b^{10}}$$

$$h_2 = 3b^5\sqrt{5}$$

- Encuentro la hipotenusa de T3:

$$(h_3)^2 = (h_1)^2 + (h_2)^2$$

$$(h_3)^2 = 5b^{10} + 45b^{10}$$

$$(h_3)^2 = 50b^{10}$$

$$h_3 = \sqrt{50b^{10}}$$

$$h_3 = \sqrt{2 \times 5^2 \times b^{10}}$$

$$h_3 = 5b^5\sqrt{2}$$

- Encuentro el perímetro de T3:

$$p = h_1 + h_2 + h_3$$

$$p = b^5\sqrt{5} + 3b^5\sqrt{5} + 5b^5\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{p = 4b^5\sqrt{5} + 5b^5\sqrt{2}} \qquad \boldsymbol{R/}$$

Recuperado de: https://goo.gl/e56y66

Ejemplo 2: Para poder mantener recto un poste metálico que sirve para detener una malla ciclón, se necesitan dos piezas más para darle soporte, el poste central mide $\sqrt{3x^5}$ y los dos laterales miden "$\sqrt{48x^5}$" de largo. Si necesito al menos 8 de estas estructuras para mantener la malla ciclón de pie. ¿Cuál es la cantidad de tubo de metal que necesito en total?

Solución:

Escribo la expresión que detalla el problema:

Longitud del poste central:	$\sqrt{3x^5}$
Longitud de los dos postes de soporte:	$2(\sqrt{48x^5})$
Suma de las tres piezas:	$\sqrt{3x^5} + \sqrt{48x^5}$
En total por las 8 estructuras:	$8(\sqrt{3x^5} + \sqrt{48x^5})$

Por tanto debo realizar las opera

$$8\left(\sqrt{3x^5}+\sqrt{48x^5}\right)$$
$$=8\left(x^2\sqrt{3x}+4x^2\sqrt{3x}\right)$$
$$=8\left(x^2\sqrt{3x}+4x^2\sqrt{3x}\right)$$
$$=8\left(5x^2\sqrt{3x}\right)$$
$$=\mathbf{40x^2\sqrt{3x}}\quad R/$$

Ejemplo 3: En el techo de la casa comunal de la colonia, he observado unos cables conocidos como tensores. Están colocados de manera que den mayor soporte a la estructura metálica que sostiene las láminas y también entre algunos pilares. Si cada tensor del techo tiene una longitud de $23a\sqrt{3bc}$ y el techo tiene un total 40 tensores y los de los pilares es de $17a\sqrt{3bc}$, y hay un total de 60 tensores. ¿Cuál será la longitud total de los cuarenta tensores?


Recuperado de: https://goo.gl/DCiUqT

Solución: $$=40\left(23a\sqrt{3bc}\right)+60\left(17a\sqrt{3bc}\right)$$
$$=920a\sqrt{3bc}+1020a\sqrt{3bc}$$
$$=\mathbf{1940a\sqrt{3bc}}\quad \boldsymbol{R/}$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He recordado el teorema de Pitágoras		
He comprendido la aplicación de los radicales semejantes en temas matemáticos de otra área		
He aplicado mis conocimientos matemáticos en la resolución de un problema		

PRACTICO

Encuentro la solución para los siguientes problemas y la expreso con radicales:

1 La suma de los lados de un lote de ventanas está representado por $3\sqrt{5x}+2\sqrt{5x}+8\sqrt{7x}+\sqrt{7x}$. ¿Cuál es la expresión reducida de la suma?

2

Un terreno está dividido en 4 porciones distintas. Expresar con radicales el área total, si las medidas de cada parte están representadas por:

$$\sqrt[3]{125m} + \sqrt[3]{8m} + \sqrt[3]{64m} + \sqrt[3]{m}$$

3

Necesito hacer una ramada con varas de bambú para hacer una sombra sobre el patio, a la vez que una plantita de loroco pueda trepar y llenar las varas por la parte de arriba. Para las dos varas de soporte, la medida es $4m\sqrt{7n}$, para las 10 varas que van sobre los soportes miden $3m\sqrt{7n}$ cada una y, por último, las dos que van en diagonal miden $5m\sqrt{7n}$. ¿Cuál es la longitud total de todas las varas de bambú?

Recuperado de: https://goo.gl/aXvqE7

4

El costo de un tubo de pvc es de $27\sqrt[3]{a^2}$ y el de las uniones en forma de codo es de $2\sqrt[3]{a\text{^}2}$, ¿Cuál es el total a pagar por 8 tubos y 20 uniones, para hacer una instalación de agua potable?

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno

1. Observo en mi comunidad que hay un alambre tensor que le da apoyo a un poste de cableado para energía eléctrica, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los catetos lo forman el poste de 6 metros de altura y la distancia de la base del poste al tensor que mide 3 metros. Elaboro un esquema, tomando como ejemplo la altura de un árbol o de una torre o un poste y planteo medidas que contengan radicales semejantes y calculo el valor de la hipotenusa según sea el caso.

2. Observo en mi comunidad, alguna edificación que contenga tensores para reforzar alguna estructura o edificación, como los techos o algunos pilares. Elaboro en mi cuaderno un esquema de tal manera que las longitudes sean expresadas en forma de expresiones radicales.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El profesor de matemática ha pedido a sus estudiantes que escriban un radical semejante a la expresión
$3a^2 b^4 \sqrt[3]{ab^2c}$. Cuatro alumnos llevan respuestas diferentes, ¿cuál es la correcta?

A	$3\sqrt[3]{9a^3 b^6 c}$	B	$\sqrt[3]{9a^7 b^{14} c}$	C	$\sqrt[3]{27a^7 b^{14} c}$	D	$\sqrt[3]{27a^3 b^{16} c}$

2. Se ha determinado que la temperatura en 3 zonas distintas de un país, está determinada por las siguientes expresiones: $\sqrt{27x^3}$,$2x\sqrt{3x}$ y $x\sqrt{3x}$. ¿Cuál expresión representa el promedio de las tres cantidades?

A	$x\sqrt{3x}$	B	$\sqrt{3x}$	C	$2x\sqrt{3x}$	D	$3x\sqrt{3x}$

Respuesta: 1C; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $14\sqrt{5x}$
2) $12\sqrt[3]{m}$
3) $48m\sqrt{7n}$
4) $256\sqrt[3]{a^2}$

BIBLIOGRAFÍA

- Figueroa Escalón, R. y Morán Mendoza, D. (2013). Matemática 9°. San Salvador: Editorial Servicios Educativos.

- Baldor, A. (2011). Álgebra Baldor. 3era Ed. Distrito Federal: Larousse - Grupo Editorial Patria.

UNIDAD 5: ESTADÍSTICA. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

OBJETIVO

- Aplicar la desviación típica al analizar críticamente fenómenos numéricos y hechos sociales; con el fin de proponer y sustentar sus ideas, respetando la opinión de los demás.

LECCIÓN 5.1. MEDIA ARITMÉTICA.

INDICADOR DE LOGRO:

Calcula con interés medias aritméticas.

SABERES PREVIOS:

- Cuando asistía regularmente a la escuela, un amigo obtuvo las evaluaciones siguientes: en el trimestre uno obtuvo 10 de nota y, en el segundo trimestre también 10; pero en el tercer trimestre 4, y en la nota al final del año le aparece 8. ¿Por qué le quedó esa nota?
- ¿Recuerdo qué es una sumatoria?
- ¿Cuál es el procedimiento para calcular un promedio?

Recuperado de: https://goo.gl/ggDzRi

Para dar respuesta a la pregunta relacionada a la nota final obtenida por mi compañero, debo recordar lo que es la media aritmética o valor promedio.

APRENDO

La media aritmética es un número que tiene la propiedad de sustituir a todos y cada uno de los datos originales sin alterar la suma de los mismos

Por ejemplo, en el caso de los tres números 10, 10, 4, puedo comenzar a quitarle al que tiene más para agregarle al que tiene menos hasta llegar a un punto de igualdad para todos los datos, así:

10	10	4	-	Le resto uno al primer diez, y se lo agrego al cuatro.
9	10	5	-	Le resto uno al segundo diez, y se lo agrego al cinco.
9	9	6	-	Le resto uno al primer nueve, y se lo agrego al seis.
8	9	7	-	Le resto uno al segundo nueve, y se lo agrego al siete.
8	8	8	-	Quedando los tres datos en valor de ocho.

Una forma más práctica para encontrar ese valor que corresponde a la media aritmética es usando la fórmula: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n}{n}$ donde cada x_i representa a cada dato, y la expreso como "la suma de todos los datos entre el total de datos".

"La suma de todos" o "sumatoria" de los datos, la represento por medio del símbolo "Sigma" (Σ). De manera que $\Sigma x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n$

Por lo que la fórmula puedo reescribirla así:

Ejemplo 1: Calculo la $\bar{x}$ de los siguientes datos 8,5,3,4,5,6,8,10,10,3

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{8+5+3+4+5+6+8+10+10+3}{10} = \frac{62}{10} = 6.2$$

Cuando tengo datos repetidos, puedo aplicar el concepto de frecuencia, o sea, el número de veces que se repite un dato. Y entonces uso la fórmula $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f}{n}$

Ejemplo 2: Calculo la $\bar{x}$ de las siguientes notas de un grupo de 30 estudiantes.

7,9,7,9,5,8,4,6,8,9,5,3,10,10,4,5,6,8,10,9,5,6,8,9,6,5,7,7,10,3

Como hay varios datos que se repiten, entonces se tiene que una forma práctica es por medio de una tabulación de datos.

x_i	*f*	x_i f
3	2	6
4	2	8
5	5	25
6	4	24
7	4	28
8	4	32
9	5	45
10	4	40
Σ	30	208

Para calcular la media aritmética, aplico la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f}{n} = \frac{208}{30} = 6.93\ aprox.$$

Con este método puedo calcular medias aritméticas de valores o frecuencias grandes.

Ejemplo 3: Calculo la edad promedio de un grupo de estudiantes de tercer ciclo.

x_i	f
12	21
13	20
14	15
15	32
16	12
Σ	100

Para resolverlo, primero multiplico cada dato por su respectiva frecuencia, luego sumo todos los productos

x_i	f	x_i f
12	21	252
13	20	260
14	15	210
15	32	480
16	12	192
Σ	100	1,394

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f}{n} = \frac{1{,}394}{100} = \mathbf{13.94} \ \boldsymbol{R/}$$

Si los datos están agrupados en clases, es necesario calcular el punto medio de cada una de ellas.

Ejemplo 3: El salario de los empleados de una empresa comercial se detalla en la siguiente tabla. ¿Cuál es el salario promedio?

Salario	**Nº de Empleados**
\$285 -\$315	45
\$316 -\$346	10
\$347 -\$377	6
\$378 -\$408	4
\$409 -\$439	5
Σ	70

Solución:

Completo la tabla con las columnas siguientes:

Clases: Los distintos rangos de salarios de los empleados.

Frecuencia (*f*): Número de empleados según el rango de salario.

Punto medio (*pm*): Valor central de cada clase, y se calcula con la fórmula:

$$pm = \frac{Lim._{superior} + Lim._{inferior}}{2}$$

Sumas parciales (*pm·f*): Es el cálculo de la frecuencia por el punto medio de cada clase.

Asi, por ejemplo para la primera clase, obtengo que:

$$pm = \frac{285 + 315}{2} = \frac{600}{2} = 300 \qquad pm \cdot f = 300 \times 45 = 13{,}500$$

Y así con las demás clases, la tabla completa queda:

x^i	*f*	*pm*	*pm·f*
$285 -$315	45	300	13,500
$316 -$346	10	331	3,310
$347 -$377	6	362	2,172
$378 -$408	4	393	1,572
$409 -$439	5	424	2,120
Σ	70		22,674

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma pm \cdot f}{n} = \frac{22{,}674}{70} = \mathbf{325.2\ \ R/}$$

Ejemplo 4: Mido las velocidades de 50 automóviles que pasan frente de mi casa. La distribución de los datos queda así:

x^i	*f*
60 – 69	5
70 – 79	6
80 – 89	18
90 – 99	8
100 – 109	4
110 – 119	9
Σ	50

¿Cuál es la velocidad promedio de los automóviles observados?

Solución: Completo la tabla:

x^i	*f*	*pm*	*pm·f*
60 – 69	5	64.5	322.50
70 – 79	6	74.5	447.00
80 – 89	18	84.5	1,521.00
90 – 99	8	94.5	756.00
100 – 109	4	104.5	418.00
110 – 119	9	114.5	1,030.50
Σ	50		4,495

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma pm \cdot f}{n} = \frac{4{,}4954}{50} = \mathbf{89.9}\ \boldsymbol{R/}$$

La velocidad promedio es de 89.9 km/h.

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido qué es la media aritmética		
He aprendido qué es la frecuencia		
He aprendido a calcular la media aritmética con datos repetidos		

PRACTICO

1 Calculo la media aritmética de los datos siguientes:

4,7,9,12,16,21

2,2,2,2,2,5,5,6,6,6,7,7,9,10,10,10,15,15,17,19,20,20

2 Resuelvo los siguientes problemas:

a) Calculo la edad media de un grupo de estudiantes de modalidades flexibles, cuyas edades son: 25, 32, 19, 56, 30, 22, 42, 28, 39 y 40.

b) En la materia de Lenguaje, 7 alumnos obtuvieron las siguientes notas: 7.5, 8.3, 6.5, 9.6, 3.8, 6.5, 5.4. Calculo la media aritmética de las notas.

c) En una prueba de conocimientos matemáticos, 30 estudiantes obtuvieron las notas en base a la siguiente distribución:

x^i	*f*
65 – 70	7
71 – 76	5
77 – 82	4
83 – 88	8
89 – 94	4
95 – 100	2
Σ	30

¿Cuál es el puntaje promedio de los estudiantes?

APLICO

Realizo las siguientes actividades en mi cuaderno.

1. Registro el tiempo que me tardo en desplazarme desde mi casa hasta mi trabajo durante una semana y calculo mi tiempo promedio, además de observar qué días me tardo más y qué días me tardo menos.

2. Registro el consumo en kilowatts hora, durante 3 meses seguidos en mi casa, con el objetivo de llevar el promedio de consumo y establecer si puedo mantenerme debajo de los 100 kw/h y aplicar al subsidio.
3. Registro mi peso durante 3 semanas y calculo mi peso promedio y establecer si debo subir o bajar de peso y mantenerme en buena salud.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. La media aritmética de la altura de los jugadores de un equipo de baloncesto que miden: 1.80, 1.83, 1.75, 1.78 y 1.71 metros, es:

A	1.77 m	B	1.70 m	C	1.80 m	D	1.76 m

2. Los siguientes datos corresponden al número de hermanos de los alumnos de una sección de noveno grado. Calcula la media aritmética de los datos.

Número de hermanos	Frecuencia
0	3
1	5
2	10
3	7
4	3
Σ	

A	2 hermanos	B	3 hermanos	C	1 hermano	D	0 hermanos

Respuesta: 1A; 2A

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1.1) 11.5 1.2) 8.954
2.a) 33.3 2 b) 6.8 2 c) 80.1

LECCIÓN 5.2. MEDIDAS DE DISPERSIÓN, AMPLITUD O RANGO DE DATOS

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve ejercicios y/o problemas aplicando la amplitud o rango en series de datos, mostrando orden en su trabajo.

SABERES PREVIOS:

Antonia, Berta y Camila han aplicado para obtener un reconocimiento a su rendimiento académico. Sus notas son las siguientes:

Antonia: 10, 10, 4.

Berta: 8, 10, 6.

Camila: 5, 10, 9.

Recuperado de: https://goo.gl/qCpAC2

La media aritmética es de 8 para cada uno. ¿Qué criterio puedo utilizar para decidir a quién debo otorgar el reconocimiento?

APRENDO

Las medidas de dispersión me sirven para determinar qué tan alejados están los datos de una distribución simple.

Cuando tengo dos distribuciones de datos y le aplico las medidas de dispersión, puedo obtener valores numéricos que me sirven para hacer una comparación sobre cuál de las dos distribuciones es más extendida o dispersa.

Las medidas de dispersión más comunes son:

- Amplitud o rango
- Desviación Media
- Varianza
- Desviación Típica
- Coeficiente de Variación

En esta ocasión solo estudiaré la amplitud o rango.

• Amplitud o rango:

La amplitud la obtengo con solo una resta entre el dato de mayor valor y el dato menor. Por fórmula:

$$a = x_{mayor} - x_{menor}$$

Ejemplo1 : Encontrar el rango de las tres jóvenes del problema inicial:

Para Antonia:	$a = x_{mayor} - x_{menor} = 10 - 4 = 6$ R/
Para Berta:	$a = x_{mayor} - x_{menor} = 8 - 6 = 2$ R/
Para Camila:	$a = x_{mayor} - x_{menor} = 10 - 5 = 5$ R/

Ejemplo 2: Al investigar y comparar el consumo de energía en kw/h de mis anteriores seis recibos, con los de vecino y obtuve los siguientes datos:

Mi consumo: 97, 95, 99, 94, 100, 97

El de mi vecino: 94, 98, 97, 93, 93, 101

Quién de los dos tiene mayor rango de consumo?

Solución:

Mi consumo:	$a = x_{mayor} - x_{menor} = 100 - 94 = 6$ R/
Mi vecino:	$a = x_{mayor} - x_{menor} = 101 - 93 = 8$ R/

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido cómo calcular la amplitud o rango		
He aprendido qué es la desviación media		
He aprendido a interpretar los resultados de la amplitud y la desviación media.		

PRACTICO

Calculo la amplitud o rango de las series de datos estadísticos siguientes:

1) 3,5,7,9,12
2) 26,12,10,12,35,30
3) 120,53,25,76,19,102,123,115,15,100

Resuelvo los siguientes problemas:

1 Las edades de los estudiantes que forman el equipo 1 para un concurso de matemática, son 17, 15, 18, 15, 16 y 17. Las edades del equipo 2 son: 18, 19, 17, 16, 18 y 18 ¿En cuál de los equipos las edades están más dispersas?

2 Realizo una investigación sobre el peso real de los paquetes de sal que son etiquetados como “una libra”. Para ello peso 15 paquetes de dos marcas diferentes, los resultados son los siguientes:

MARCA A					MARCA B				
1.00	1.10	1.05	1.00	1.35	0.96	1.95	1.80	0.99	0.95
1.03	1.35	1.30	1.02	1.20	1.17	1.13	1.00	1.00	0.95
1.05	1.10	0.98	1.00	1.02	1.06	1.00	1.03	1.10	1.15

¿Cuál de las dos marcas tiene mayor amplitud?

3 Obtengo el peso en libras de dos grupos de 12 personas cada uno y determino cuál de ellos tiene mayor rango de dispersión.

MARCA A				MARCA B			
175	160	148	145	160	170	155	150
140	145	150	165	145	144	138	125
138	127	145	156	155	148	158	160

¿Cuál de las dos grupos tiene mayor rango de dispersión en sus pesos?

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno las siguientes actividades:

1. Con la ayuda de mis compañeros de trabajo o vecinos, hago una recolección de datos sobre el peso en libras de cada uno de ellos. Luego establezco el rango de los datos.

2. Elaboro un registro del tiempo que me tardo en llegar de mi casa a mi trabajo y calculo la amplitud de dispersión de los mismos.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. Es la amplitud de la siguiente serie de datos: 15, 22, 25, 14, 10, 32, 35, 26, 12, 34, 19, 27							
A	12	B	25	C	27	D	10
2. Los puntajes obtenidos en un examen de admisión fueron los siguientes: 67, 94, 53, 16, 88, 42, 20, 39 y 75. ¿Cuál es el rango de los datos?							
A	74	B	8	C	78	D	16

Respuesta: 1B; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

Ejercicios:
1) 9 2) 18 3) 108

Problemas:
1) Las edades de los estudiantes que forman el equipo 2
2) La marca B
3) El grupo A

LECCIÓN 5.3. DESVIACIÓN TÍPICA O ESTÁNDAR.

INDICADOR DE LOGRO:

Resuelve con dominio y confianza ejercicios y problemas aplicando las fórmulas para el cálculo de la desviación típica de un conjunto de datos no agrupados.

SABERES PREVIOS:

Las ventas semanales en el mes de enero de mi tiendita han sido \$260, \$210, \$220, \$230. En el mes de febrero han sido \$215, \$240, \$250, \$255. ¿En qué mes obtuve un mejor promedio de ventas?

APRENDO

La desviación típica o estándar, me permite valorar qué tan dispersos están los datos con respecto al valor central conocido como media aritmética.

Para calcular la desviación típica de una serie de datos, primero debo calcular su media aritmética, luego calcular la diferencia entre cada valor y la media aritmética. Para ello hago uso de la fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Ejemplo 1 : Calculo la desviación típica de los datos de las ventas del mes de enero.

- Primero calculo la media aritmética de los datos:

$$\bar{x} = \frac{260 + 210 + 220 + 230}{4} = \frac{920}{4} = \mathbf{230}$$

• Ahora aplico la fórmula de la desviación típica :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(260 - \mathbf{230})^2 + (210 - \mathbf{230})^2 + (220 - \mathbf{230})^2 + (230 - \mathbf{230})^2}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(30)^2 + (-20)^2 + (-10)^2 + (0)^2}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{900 + 400 + 100 + 0}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1{,}400}{4}} = \sqrt{350} = \mathbf{18.71}$$

Ejemplo 2: Calculo la desviación típica de los datos de las ventas del mes de febrero:

• Primero calculo la media aritmética de los datos:

$$\bar{x} = \frac{215 + 240 + 250 + 255}{4} = \frac{960}{4} = 240$$

• Ahora aplico la fórmula de la desviación típica :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(215 - 240)^2 + (240 - 240)^2 + (250 - 240)^2 + (255 - 240)^2}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-25)^2 + (0)^2 + (10)^2 + (15)^2}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{625 + 0 + 100 + 225}{4}}$$

$$\sigma = \sqrt{237.5} = \mathbf{15.41}\ \boldsymbol{R/}$$

• En base a las respuestas obtenidas de las desviaciones típicas de enero y febrero, obtengo conclusiones.

Enero	**Febrero**
σ=18.71	*σ=15.41*

Puedo observar que la desviación típica de los datos de febrero es menor que la de enero; por tanto, mis ventas en enero fueron más constantes.

Ejemplo 3: En mi empresa nos dan un bono por mantener las ventas constantes mes a mes, siempre que no sobrepasemos de un desviación típica de $ 500, mis ventas de estos cuatro meses han sido $ 1,300; $ 3,000; $ 4,000; $ 2,340; $ 5,000

¿Hemos ganado el bono por ventas contantes?

Solución:

• Primero calculo la media aritmética de los datos:

$$\bar{x} = \frac{1300 + 3000 + 4000 + 2340 + 5000}{5} = \frac{15,640}{5} = \mathbf{3,128}$$

• Ahora aplico la fórmula de la desviación típica :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1300 - \mathbf{3128})^2 + (3000 - \mathbf{3128})^2 + (4000 - \mathbf{3128})^2 + (2340 - \mathbf{3128})^2 + (5000 - \mathbf{3128})^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-1828)^2 + (-128)^2 + (872)^2 + (-788)^2 + (1872)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3{,}341{,}584 + 16{,}384 + 760{,}384 + 620{,}944 + 3{,}504{,}384}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8{,}243{,}680}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{1{,}648{,}736} = \mathbf{1,284.03\ R/}$$

Lamentablemente he perdido mi bono; porque mi desviación típica es mayor a los $500 que establece la empresa.

Ejemplo 4: En la empresa que trabajo, se nos permite tomar un descanso de aproximadamente 15 minutos durante el turno de la mañana. El encargado del timbre a veces se descuida y no marca los 15 minutos exactos. ¿Cuál es la desviación típica de los tiempos de recesos, si durante esta semana los recesos duraron: 15, 14, 16, 15, 17 y 19 minutos respectivamente?

Solución:

• Primero calculo la media aritmética de los datos:

$$\bar{x} = \frac{15 + 14 + 16 + 15 + 17 + 19}{6} = \frac{96}{6} = \mathbf{16}$$

Ahora aplico la fórmula de la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(15 - \mathbf{16})^2 + (14 - \mathbf{16})^2 + (16 - \mathbf{16})^2 + (15 - \mathbf{16})^2 + (17 - \mathbf{16})^2 + (19 - \mathbf{16})^2}{6}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-1)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2}{6}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1 + 4 + 0 + 1 + 1 + 9}{6}} = \sqrt{\frac{16}{6}} = \sqrt{2.7} = \mathbf{1.63}\ \boldsymbol{R/}$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido cómo calcular la varianza		
He aprendido cómo calcular la desviación típica		
He aprendido a interpretar los resultados de la desviación típica		

PRACTICO

Calculo la desviación típica de las siguientes series de datos

1) 6, 7, 7, 8, 9
2) 120, 115, 122, 115
3) 32, 52, 46, 30, 25, 20

Resuelvo los siguientes problemas:

1 En un hospital, el número de pacientes atendidos durante 4 días consecutivos fueron: 65, 58, 40 y 52. En una clínica particular, durante esos mismos días, se atendieron respectivamente 12, 16, 9 y 8 pacientes. Calculo la desviación típica para determinar cuáles datos se encuentran más agrupados.

2 Para controlar mi peso llevo un registro detallado semanal. ¿Cuál es la desviación típica de mi peso, si los datos registrados en 6 semanas es el siguiente: 144, 148, 150, 148, 149, 151?

3 El gasto en saldo para teléfono celular durante semana a semana es; 5, 2, 3, 5, 10, 3, 1, ¿Cuál es la desviación típica de mi gasto?

APLICO

Resuelvo en mi cuaderno las siguientes actividades:

1. Con la ayuda de mis compañeros de trabajo o vecinos, recolecto información sobre la estatura en centímetros de cada uno de ellos y calculo la desviación típica de los datos.

2. Investigo cuál es el valor normal de glucosa en la sangre (mg/dl) de una persona adulta y realizo un chequeo de glucosa. Luego registro 5 datos para establecer si mis valores se mantienen en lo normal y cuál es la desviación típica de estos.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. Calcular la desviación típica de los siguientes datos: 5, 8, 6, 9, 6, 8							
A	1.4	B	3.3	C	1.6	D	1.8

2. Las desviaciones típicas de tres series de datos son las siguientes: Grupo A: 2.3, Grupo B: 1.9 y Grupo C: 2.5. ¿Cuál es la afirmación correcta respecto a estos datos?	
A	Los datos del Grupo A están más agrupados que los de B
B	Los datos del Grupo B están más separados que los de C
C	Los datos del Grupo A están más separados que los de C
D	Los datos del Grupo C están más separados que los de B

Respuesta: 1A; 2D

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES
PRACTICO

Ejercicios:

1) 1.02
2) 3.08
3) 9.70

Problemas:

1) *Los datos de la clínica particular*
2) 1.92
3) 2.44

BIBLIOGRAFÍA

- Ministerio de Educación, (2018) 1era Edición Matemática 9° ESMATE. San Salvador: Ministerio de Educación.

- Figueroa Escalón, R. y Morán Mendoza, D. (2013). Matemática 9°. San Salvador: Editorial Servicios Educativos.

UNIDAD 6: ÁNGULOS

OBJETIVO

- Aplicar los ángulos y sus propiedades, en la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas del aula y/o del entorno.

LECCIÓN 6.1. ÁNGULOS

INDICADOR DE LOGRO:

Utiliza con seguridad los giros en sentido horario y anti horario para construir y señalar ángulos positivos y negativos.

SABERES PREVIOS:

Observo la figura del reloj

¿Cuál es mi opinión sobre las agujas del reloj?

¿En qué sentido giran?

¿Qué figura forman dos de ellas?

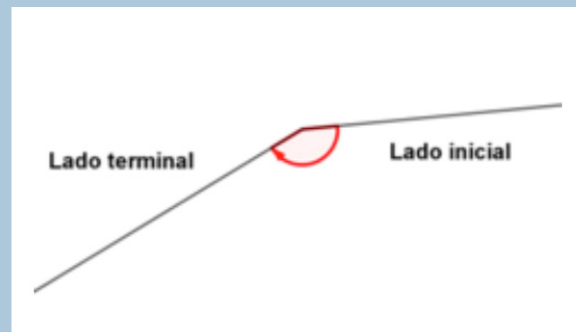
¿Recuerdo cuántos grados mide una rotación completa?

Recuperado de: https://goo.gl/q4dPZq

APRENDO

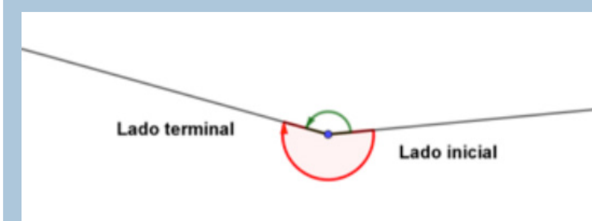
En un reloj como el de la imagen, por cada espacio que avanza la aguja minutera, la abertura que hay entre las dos agujas puede aumentar o disminuir, dependiendo de la hora que sea. Esta abertura se llama ángulo.

Un ángulo es la abertura formada por dos segmentos de rectas unidas en un punto común al que llamo vértice. Está formado por un lado inicial y un lado terminal, el cual dependiendo su sentido de rotación, determina si el ángulo es positivo o negativo.

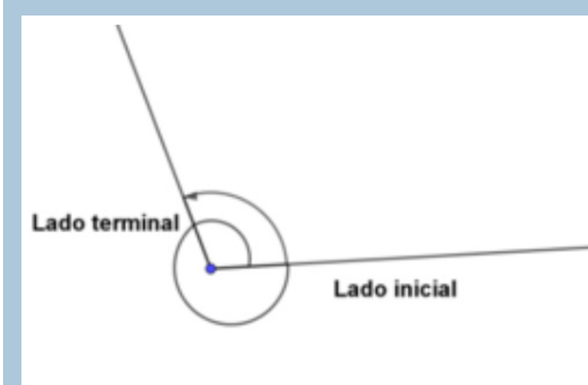
Ángulo Positivo	Ángulo Negativo
	
Sentido anti-horario	Sentido horario

Puedo observar que las agujas del reloj giran en sentido negativo, por eso se llama también sentido horario.

De manera más general, si tengo dos segmentos de recta o semirrectas, unidos en el vértice, puedo hacer referencia a un ángulo positivo y su equivalente negativo.

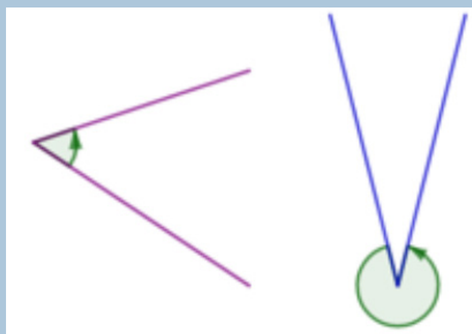


Un ángulo puede tener una abertura mayor a una rotación, en ese caso el trazo del ángulo es como una espiral. Por ejemplo, la figura de la derecha.

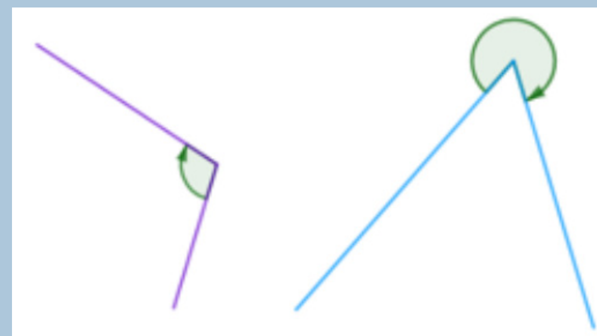


Ejemplo 1. Construyo dos ángulos positivos y dos negativos.

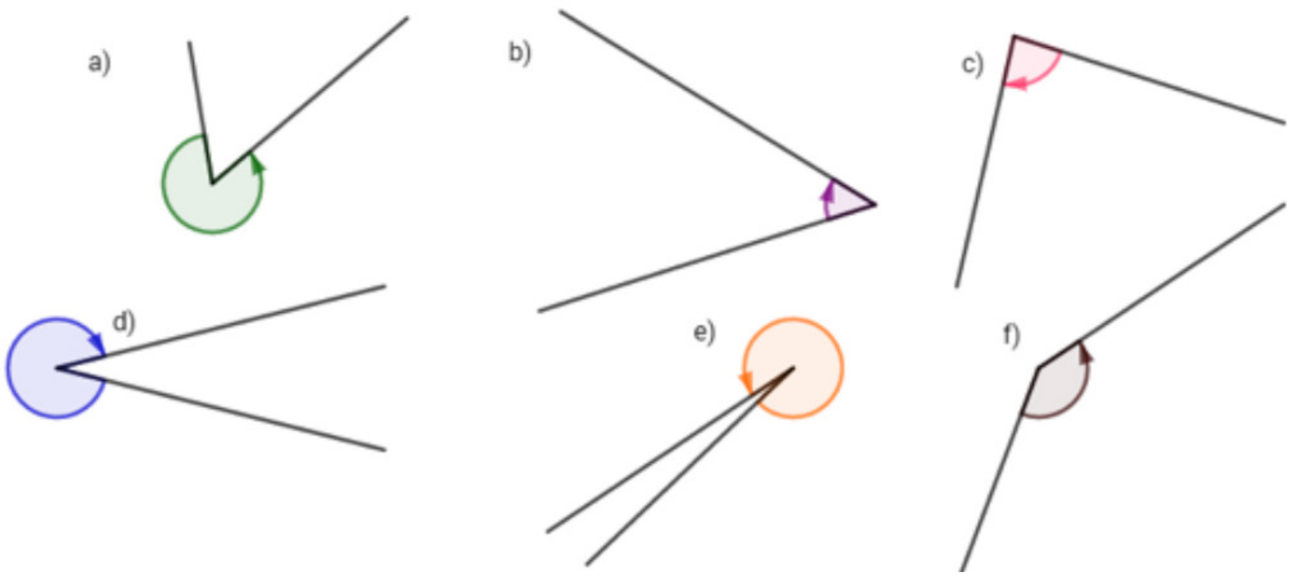
a) Ángulos positivos: observo que la flechita vaya en dirección contraria a las agujas del reloj.



b) Ángulos negativos: observo que la flechita vaya en dirección de las agujas del reloj.



Ejemplo 2. Señalo los ángulos positivos y los negativos.



Solución:

a) Ángulo Positivo
b) Ángulo Negativo
c) Ángulo Negativo
d) Ángulo Negativo
e) Ángulo Positivo
f) Ángulo Positivo

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He recordado qué es un ángulo.		
He aprendido cuándo un ángulo es positivo		
He aprendido cuándo un ángulo es negativo		

PRACTICO

Realizo las siguientes actividades.

1 Clasifico los siguientes ángulos en positivos o negativos:

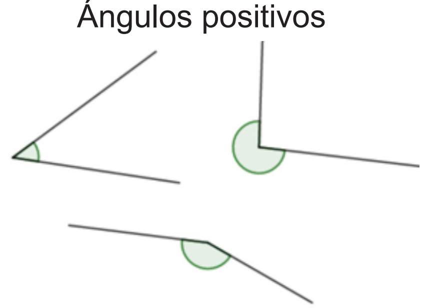
9)

10)

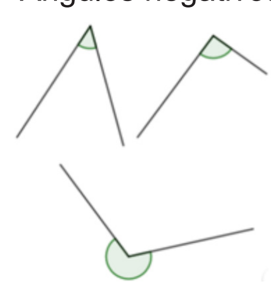
11)

2 Dibujo la flechita, señalando los ángulos con el sentido positivo o negativo, según se indique:

Ángulos positivos



Ángulos negativos



APLICO

Observo mi entorno de la casa y comunidad en general; luego elaboro en mi cuaderno una tabla comparativa con una lista de situaciones o casos en las que se puedan ejemplificar los ángulos positivos y los negativos. Luego los construyo y comparto la actividad realizada con amigos o familiares.

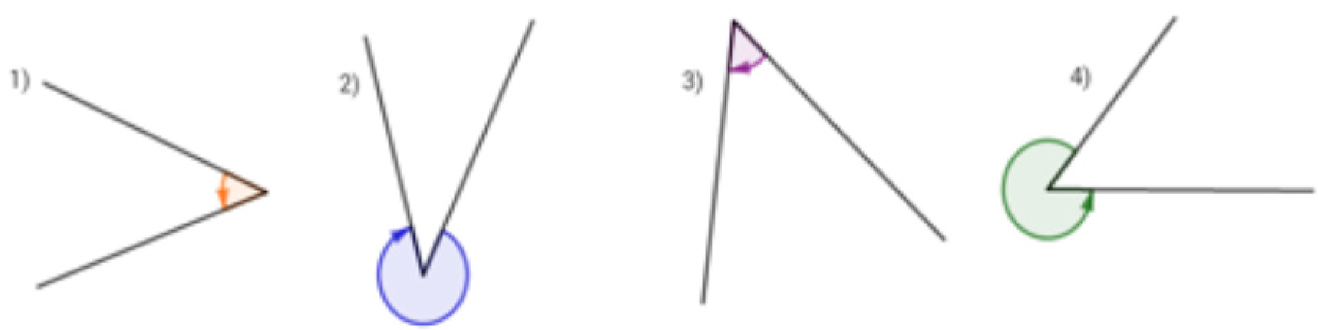
AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. Al destapar un bote de mayonesa, el sentido del giro de la tapa es:

A	Positivo	B	Negativo	C	Nulo	D	Paralelo

2. ¿Cuáles de los siguientes ángulos tienen sentido negativo?



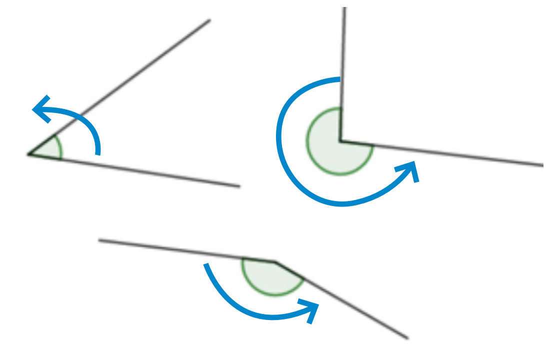
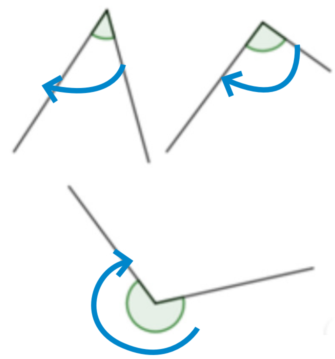
A	1 y 3	B	2 y 3	C	3 y 4	D	1 y 4

Respuesta: 1A; 2B

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1.1) positivo 1.2) negativo 1.3) positivo

Ángulos positivos	Ángulos negativos
	

LECCIÓN 6.2. ÁNGULOS COTERMINALES

INDICADOR DE LOGRO:

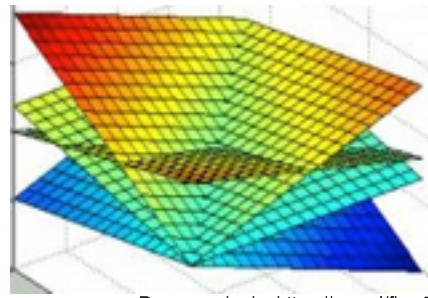
Resuelve problemas determinando el menor ángulo positivo y el mayor ángulo negativo que sean coterminales a un ángulo dado.

SABERES PREVIOS:

Observo la figura.

¿Identifico ángulos positivos o negativos?

¿Logro identificar lado inicial y final de un ángulo?



Recuperado de: https://goo.gl/fjrcu7

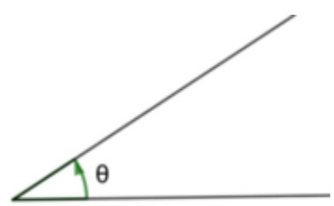
APRENDO

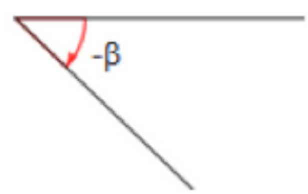
Recuerdo que los ángulos tienen un lado inicial y un lado terminal. El nombre que reciba el lado, depende del sentido que tenga el ángulo, que puede ser positivo o negativo

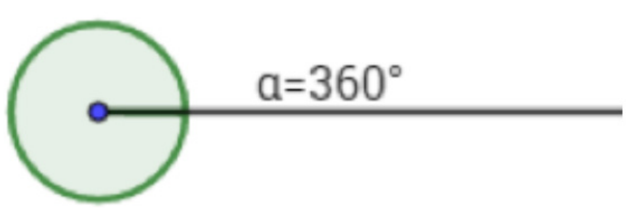
Recuperado de: https://goo.gl/W89Bds

Un ángulo es coterminal de otro, si sus respectivos lados iniciales y terminales coinciden respectivamente. Sin importar en qué sentido sea la rotación del lado terminal.

Puedo representar un ángulo con letras griegas minúsculas, por ejemplo “theta” (θ), “beta” ( ) “alfa”( )





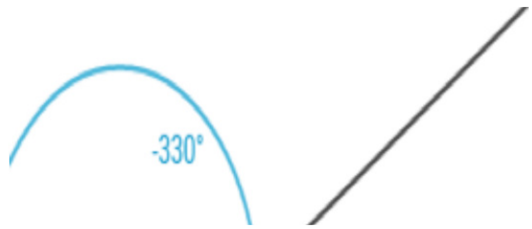


Como una rotación completa mide 360°, Si tengo un ángulo entre 0° y 360° y, además, quiero encontrar el ángulo coterminal siguiente a éste, en sentido positivo, simplemente añado una rotación completa.

Ángulo θ	Ángulo coterminal θ+360°
30°	30°+360°=390°
45°	45°+360°=405°
122°	122°+360°=482°

Y si fuera el ángulo coterminal; pero en sentido negativo, entonces resto una rotación, así:

Ángulo θ	Ángulo coterminal θ-360°
30°	30°-360°=-330°
45°	45°-360°=-315°
122°	122°-360°=-238°

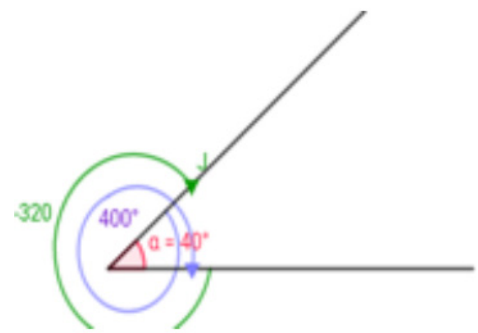


Ejemplo 1: Encuentro el menor ángulo positivo y mayor ángulo negativo coterminales al ángulo θ=400°.

Le llamo “menor ángulo positivo” si se encuentra entre 0° y 360°, y “mayor ángulo negativo” si está entre 0° y – 360°. Por tanto, al ángulo 400°, como se pasa de 360°, hago la resta:

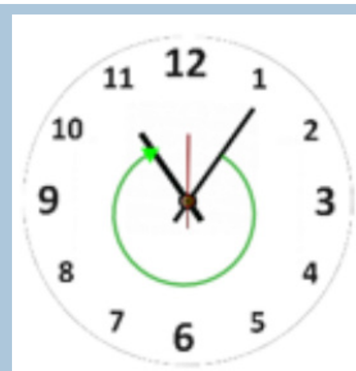
θ=400°-360°=40° Menor positivo

θ=40°-360°=-320° Mayor negativo



Ejemplo 2. Las agujas de un reloj tienen un ángulo de 60°. Si después de ese momento da una vuelta más. ¿Cuál es el mayor ángulo negativo coterminal recorrido por la aguja?

θ=60°-360°=-300°



Recuperado de: https://goo.gl/EFsK11

Ejemplo 3. Cuando fui a la feria me subí en "La Chicago" y quedé en un carrito a 35° de la horizontal. ¿Cuál es el mayor ángulo negativo coterminal recorrido por mi carrito?

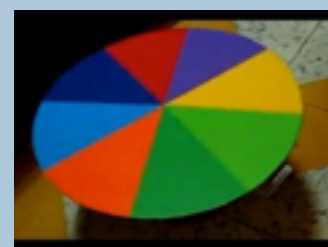
$$\theta=35°-360°=-325°$$

Recuperado de: https://goo.gl/ySDbnC

Ejemplo 4. Para ganarse un premio hay que darle vuelta a una ruleta, después de haber girado 515° en sentido anti horario, ¿Cuál es el menor ángulo positivo coterminal que ha recorrido?¿Cuál es el mayor ángulo negativo?

$\theta=515°-360°=155°$ Menor positivo

$\theta=155°-360°=-205°$ Mayor negativo



Recuperado de: https://goo.gl/fP63U1

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido qué son los ángulos coterminales		
He aprendido qué es el ángulo menor positivo coterminal		
He aprendido qué es el ángulo mayor negativo coterminal		

PRACTICO

Desarrollo las actividades siguientes

1

Encuentro el menor ángulo positivo y mayor ángulo negativo coterminales a los ángulos siguientes:

$\theta=65°$

$\theta=130°$

$\theta=460°$

2

Resuelvo los siguientes problemas:

a) Luego de que las aspas de un ventilador han girado 625°, ¿cuál es el menor ángulo positivo coterminal y el mayor ángulo negativo que ha recorrido?

b) Un niño da varias vueltas alrededor de un jardín circular. ¿Cuál es el menor ángulo positivo y el mayor ángulo negativo coterminal que ha recorrido, después de correr 275°?

c) ¿Cuál es el menor ángulo positivo y el mayor ángulo negativo coterminal que ha recorrido un carro que compite en una pista circular, después de recorrer 800°?

APLICO

Observo el entorno e identifico una situación que puedo representar en una maqueta que involucre ángulos, la construyo; luego en los ángulos señalo los lados inicial y terminal, ángulos coterminales y le explico a un compañero o vecino qué son los ángulos positivos, negativos y coterminales.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El menor ángulo positivo y el mayor ángulo negativo de $\theta=500°$ son:							
A	860° y -140°	B	140° y -220°	C	860° y -220°	D	140° y -140°
2. Un atleta está entrenando en una pista circular, ¿cuál es el ángulo menor positivo y el mayor negativo coterminal que ha recorrido, si en total ha corrido 430°?							
A	-70° y 290°	B	80° y -290°	C	-70° y 220°	D	70° y -290°

Respuesta: 1B; 2D

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1.1) *Menor positivo:425° y mayor negativo:-295°*

1.2) *Menor positivo:490° y mayor negativo:-230°*

1.3) *Menor positivo:10° y mayor negativo:-260°*

2 a) *Menor positivo:265° y mayor negativo:-95°*

2 b) *Menor positivo:635° y mayor negativo:-85°*

2 c) *Menor positivo:80° y mayor negativo:-280°*

LECCIÓN 6.3. MEDIDAS DE ÁNGULOS

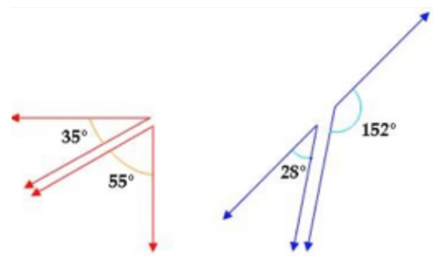
INDICADOR DE LOGRO:

Determina y explica con esmero las medidas de ángulos en grados sexagesimales.

SABERES PREVIOS:

Me piden que compruebe que esa es la medida correcta de esos ángulos

- Primero indico el instrumento a utilizar.
- Describo el paso a paso a seguir.
- Recuerdo la unidad de medida de ángulos

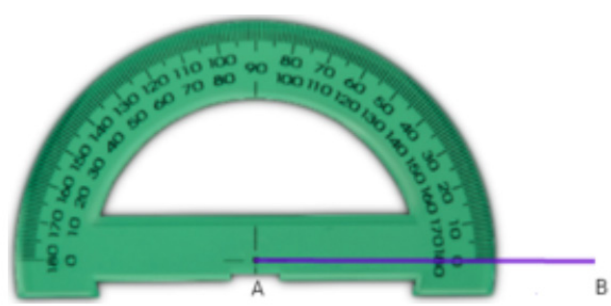


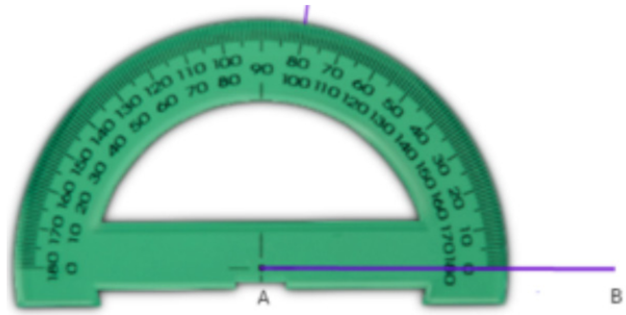
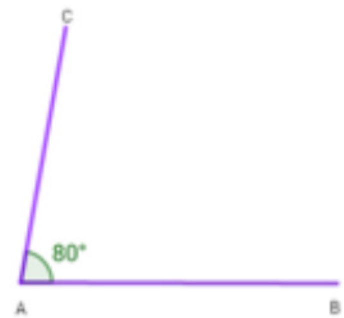
APRENDO

Qué una rotación tenga 360°, es algo que se dice viene desde la antigua Babilonia; pues ellos tenían un sistema de numeración en base 60. Al medir un ángulo en grados, estoy utilizando el sistema sexagesimal.

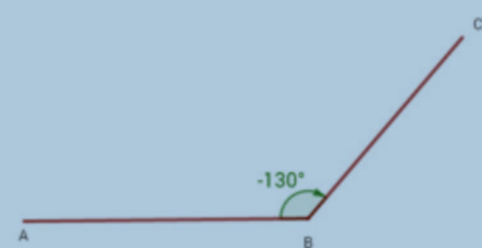
Un grado es cada una de las partes que obtengo al dividir cualquier circunferencia en 360 partes iguales y se divide en 4 partes de 90° cada una.

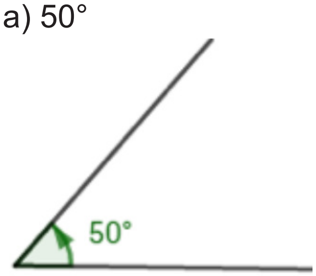
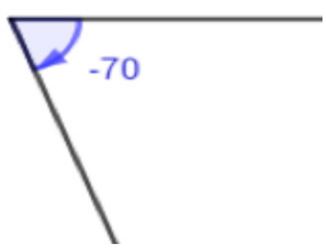
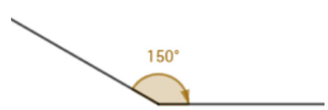
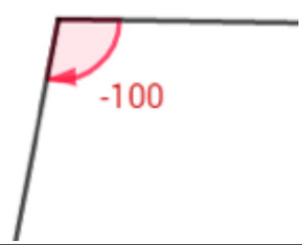
El instrumento para medir grados es el transportador.
Para dibujar ángulos usando el transportador, se siguen los pasos que se detallan a continuación:

Ejemplo 1. Trazar un ángulo de 80°	
Paso 1. Se traza uno de los lados del ángulo	A B
Paso 2. Si voy a dibujar en sentido positivo, ubico el centro del transportador en el extremo A, si es en sentido negativo lo ubico en B. Como el ángulo es positivo ubico el centro en A.	 Recuperado de: https://goo.gl/EV5ueD

Paso 3. Coloco una señal en la medida que estoy buscando, teniendo cuidado de usar la escala que comienza de cero a partir del extremo “B” del segmento. En este caso, utilizo la escala superior.	
Paso 4. Uno el extremo “A” con la señal que acabo de marcar.	

Ejemplo 2. Trazar un ángulo de -130°

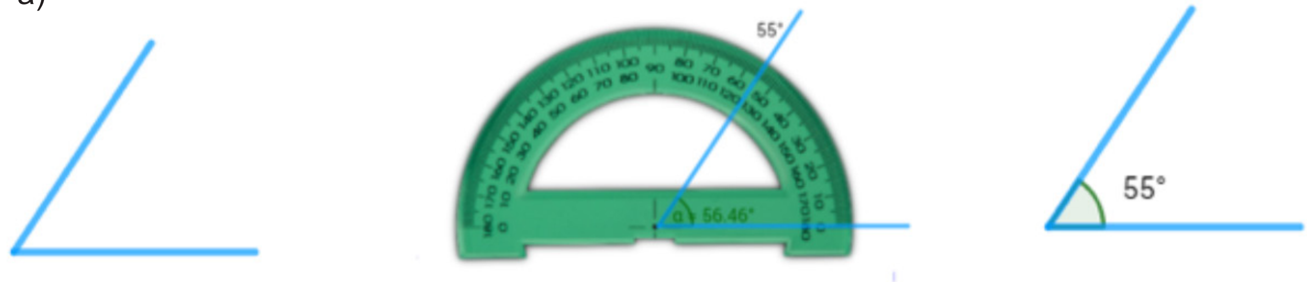


Ejemplo 3. Utilizando el transportador, construyo los siguientes ángulos:			
a) 50°, b) -70°, c) 150° y d) -100°			
a) 50° 	b) -70° 	c) 150° 	d) -100° 

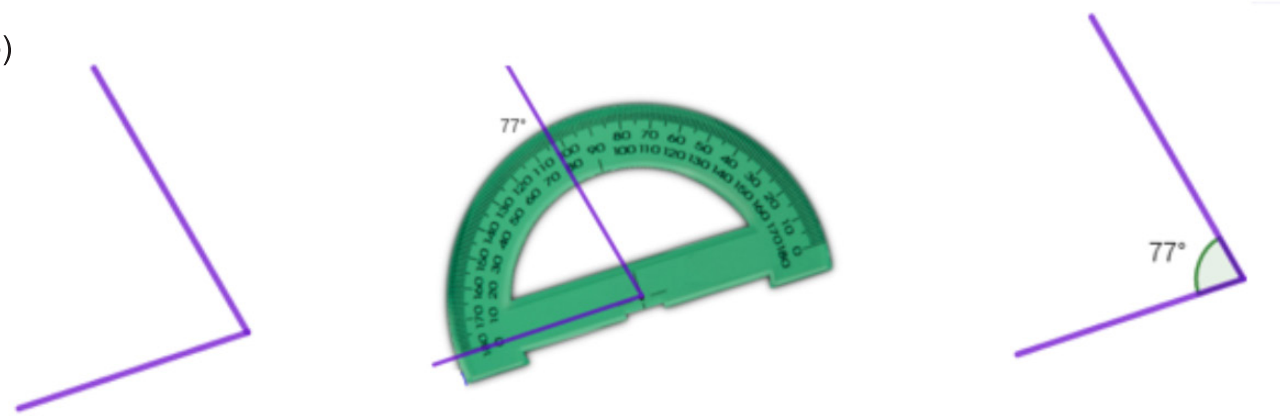
Cuando el sentido del ángulo no es importante, basta con trazarlo con la medida solicitada, sin dibujar la flechita no colocar el signo “-“.

Ejemplo 4. Calculo la medida en grados de los ángulos dados

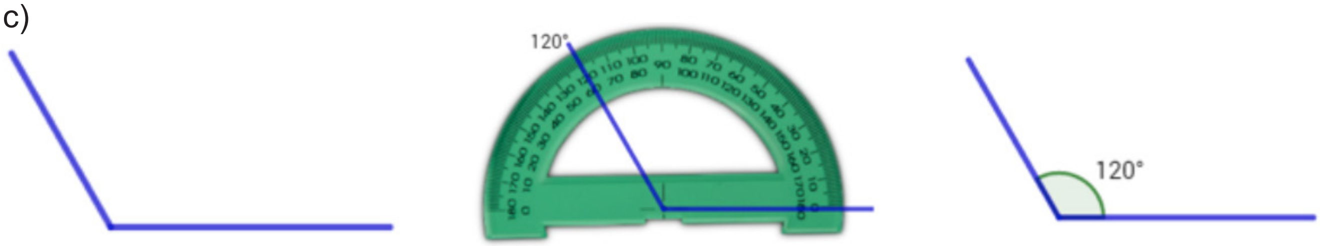
a)



b)



c)



Evalúo mi aprendizaje

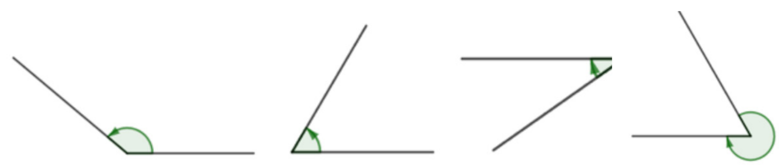
CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido qué es el sistema sexagesimal de medidas de ángulos		
Utilizo correctamente el transportador para trazar ángulos		
Utilizo correctamente el transportador para medir ángulos ya trazados		

PRACTICO

Realizo las siguientes actividades

1

Calculo la medida de los siguientes ángulos en grados sexagesimales, usando mi transportador.



2

Uso el transportador para dibujar los siguientes ángulos:

a) 35°   b) 72°   c) 148°

d) -158°   e) -27°   f)- 95°

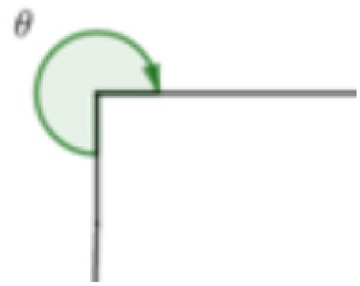
APLICO

Observo a mi alrededor donde hayan ángulos y los mido con el transportador. Luego dibujo ese ángulo en mi cuaderno. Le explico a un familiar o amigo cómo dibujar y medir ángulos utilizando correctamente el transportador.

AUTOEVALUACIÓN

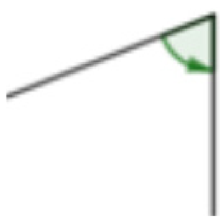
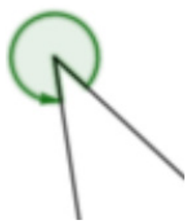
Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. El valor del ángulo θ es :



A	90°	B	-90°	C	270	D	-270°

2. El ángulo cuya medida está entre 90° y 180° es:

Respuesta: 1D; 2C

	A	B	C	D
1				
2				

SOLUCIONES

PRACTICO

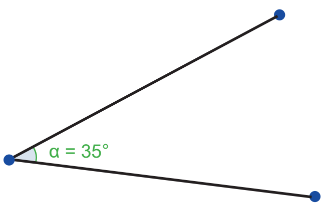
1 a) 140°

1 b) 61°

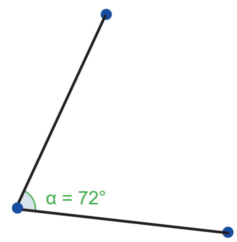
1 c) -35°

1 d) -298°

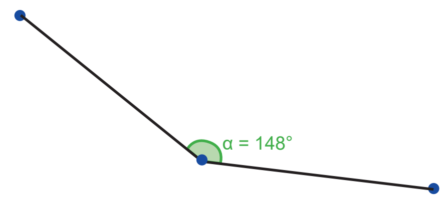
2a) 35°



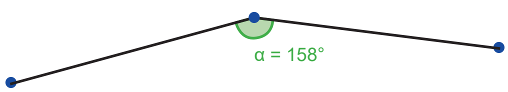
2b) 72°



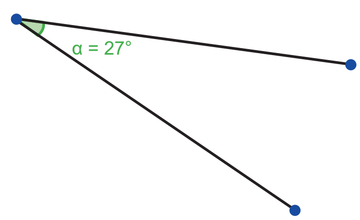
2c) 148°



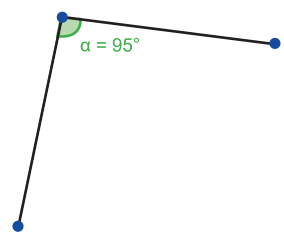
2d) -158°



2e) -27°



2f) - 95°



LECCIÓN 6.4. CONVERSIÓN DE SISTEMA DE MEDIDAS DE ÁNGULOS.

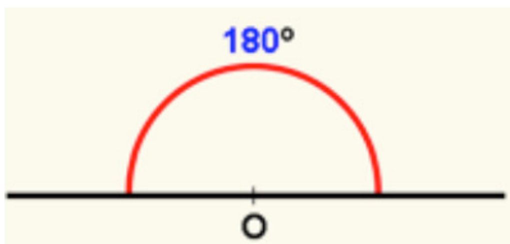
INDICADOR DE LOGRO:

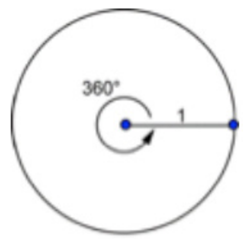
Utiliza con confianza factores de conversión para resolver problemas que involucren medidas angulares.

SABERES PREVIOS:

Observo ambas figuras

- ¿Recuerdo el nombre de estos ángulos?
- ¿Cuál es la unidad de medida de ángulos que más se utiliza?
- ¿Conozco otra unidad de medida angular?





APRENDO

En la práctica, la medida de ángulos es por medio del sistema sexagesimal, pero a veces voy a encontrar que las medidas se expresan en radianes.

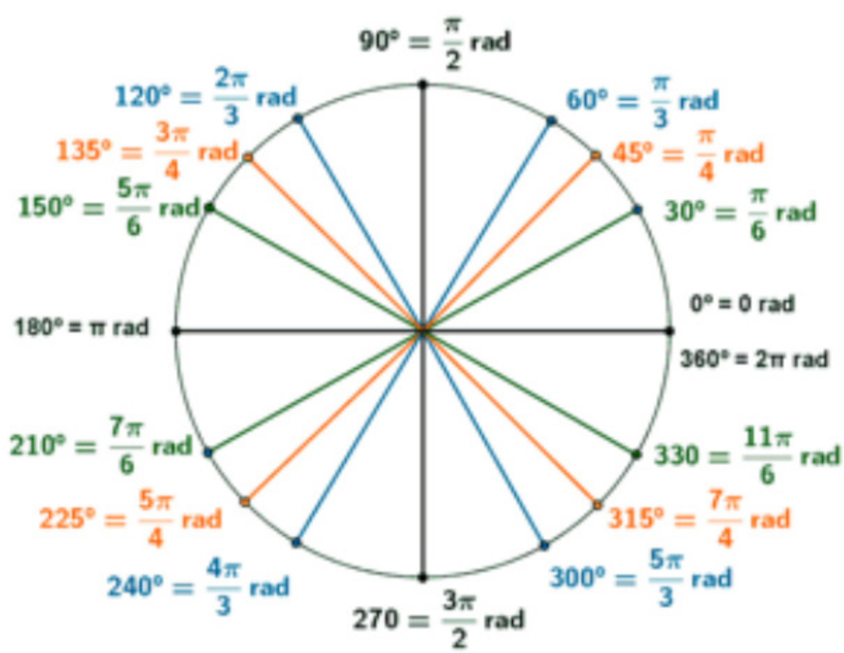
Los radianes son las unidades de medida del sistema circular y se expresan mediante fracciones acompañadas de la constante “pi” (π), que tiene un valor aproximado de 3.1416.

En la figura de la izquierda, puedo observar los valores en grados sexagesimales y su equivalente en radianes, por ejemplo:

$$45° = \frac{\pi}{4} rad \qquad 60° = \frac{\pi}{3} rad$$

$$180° = \pi\ rad$$

$$90° = \frac{\pi}{2} rad \qquad 360° = 2\pi\ rad$$



Recuperado de: https://goo.gl/8BgKUf

Para poder convertir grados sexagesimales a radianes y viceversa, debo establecer una relación que me sirva como base de la conversión.

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Y de esta relación puedo obtener: 180° = π rad, y esta será mi relación base para la conversión entre medidas, usando la regla de tres simple.

Ejemplo 1: Convierto 45° en radianes.

Grados	Radianes
180°	π rad
45°	x

$$x = \frac{45° \times \pi\, rad}{180°} = \frac{\pi}{4}\, rad$$

Las fracciones resultantes deben simplificarse: $\frac{45°}{180°} = \frac{1}{4}$

x

Grados	Radianes
180°	*π rad*
72°	x

$$x = \frac{72° \times \pi\, rad}{180°} = \frac{2\pi}{5}\, rad$$

Ejemplo 3: Convierto 10° en radianes.

Grados	Radianes
180°	*π rad*
10°	x

$$x = \frac{10° \times \pi\, rad}{180°} = \frac{\pi}{18}\, rad$$

Ejemplo 4: Convierto – 81° en radianes.

Grados	Radianes
180°	π rad
– 81°	x

$$x = \frac{-81° \times \pi\, rad}{180°} = -\frac{9\pi}{20}\, rad$$

Para convertir radianes a grados, utilizo la misma relación 180° = π rad y la regla de tres simple.

Ejemplo 5: Convierto $\frac{\pi}{12}$ rad a grados

Grados	Radianes
180°	π rad
x	$\frac{\pi}{12}$ rad

$$x = \frac{\frac{\pi}{12}\, rad \times 180°}{\pi\, rad} = \frac{15° \pi}{\pi} = 15°$$

Ejemplo 6: Convierto $\frac{3\pi}{4}$ rad a grados

Grados	Radianes
180°	π rad
x	$\frac{3\pi}{4}$ rad

$$x = \frac{\frac{3\pi}{4}\, rad \times 180°}{\pi\, rad} = \frac{135°\pi}{\pi} = 135°$$

Ejemplo 7: Convierto 5π rad a grados

Grados	Radianes
180°	π rad
x	5π rad

$$x = \frac{5\pi\, rad \times 180°}{\pi\, rad} = \frac{900°\pi}{\pi} = 900°$$

Ejemplo 8: En mi casa tengo una antena de cable que hace poco ha dejado de funcionar bien; ya que se ha desnivelado. Al llamar a la compañía me dieron la solución del problema, debo elevar $\frac{\pi}{6}$ rad la antena; pero como solo tengo un transportador que mide grados. ¿Cuántos grados tengo que elevar la antena?


Recuperado de: https://goo.gl/4N1yJm

Grados	Radianes
180°	π rad
x	$\frac{\pi}{6}$ rad

$$x = \frac{\frac{\pi}{6}\, rad \times 180°}{\pi\, rad} = \frac{30°\pi}{\pi} = 30°$$

Por tanto debo elevar la antena 30° para que quede alineada.


Recuperado de: https://goo.gl/XDF1EB

Ejemplo 9. Desde el campanario de la catedral, un hombre observa un monumento en la plaza de enfrente, que está a 50° desde su posición. ¿Cuál es el equivalente de este ángulo en radianes?

Grados	Radianes
180°	π rad
50°	X

$$x = \frac{50° \times \pi\, rad}{180°} = \frac{5\pi}{18} rad$$

Ejemplo 10. El ángulo entre dos cables de electricidad es de $\frac{5\pi}{12}$ rad ¿Cuál es su equivalente en grados?


Recuperado de: https://goo.gl/6yTbfE

Grados	Radianes
180°	π rad
X	$\frac{5\pi}{12}$ rad

$$x = \frac{\frac{5\pi}{12}\, rad \times 180°}{\pi\, rad} = \frac{75°\pi}{\pi} = 75°$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido cómo hacer la conversión de grados a radianes		
He aprendido cómo hacer la conversión de radianes a grados		
He aprendido a aplicar las conversiones en un problema		

PRACTICO

Realizo los siguientes ejercicios en mi cuaderno

1 Convierto $\frac{\pi}{4}$ rad a grados

2 Convierto $\frac{2\pi}{5}$ rad a grados

3 Convierto -36° en radianes

4 Convierto 20° en radianes

5 El ángulo entre las dos partes de una escalera portátil es de 35°. ¿Cuánto mide ese ángulo en radianes?

6 Una lámpara esta sujetada a un poste, formando con éste un ángulo de 82°. ¿Cuál es su equivalente en radianes?

7 Según las indicaciones para armar un mueble, debo ensamblar una pieza con otra de manera que entre ellas quede un ángulo de $\frac{3\pi}{8}$ rad. ¿A cuántos grados equivale esta medida?

8 El ángulo de inclinación de un techo es de $\frac{2\pi}{15}$ rad. ¿Cuál es su inclinación en grados?

APLICO

Utilizo un transportador para tomar la medida en grados de diferentes ángulos que encuentre en mi entorno y que sean menores de 180°; luego efectúo la conversión al sistema circular y ubico mis resultados en una tabla comparativa. En medio pliego de cartulina presento mis cálculos a algún amigo o compañero de trabajo.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. La conversión de $\frac{\pi}{12}$ rad a grados es:							
A	15°	B	20°	C	36°	D	30°
2. La abertura entre las patas de una mesa es de 70°. La conversión de este ángulo a radianes es:							
	$\frac{14\pi}{18}\,rad$		$\frac{\pi}{90}\,rad$		$\frac{7\pi}{18}\,rad$		$\frac{7\pi}{90}\,rad$

Respuesta: 1A; 2C

	A	B	C	D
1	⬭	⬭	⬭	⬭
2	⬭	⬭	⬭	⬭

SOLUCIONES
PRACTICO

1) $45°$
2) $72°$
3) $-\frac{\pi}{5}\,rad.$
4) $\frac{\pi}{9}\,rad.$
5) $\frac{7\pi}{36}\,rad.$
6) $\frac{41\pi}{90}\,rad.$
7) $67.5°$
8) $24°$

LECCIÓN 6.5. LONGITUD DE ARCO.

INDICADOR DE LOGRO:

Calcula con interés la longitud de arco utilizando la fórmula $S = rt$

SABERES PREVIOS:

•Este tapete circular tiene un radio de 15 cm y quiero saber la cantidad de listón dorado que se le colocó en el contorno, ¿qué fórmula utilizo?

•Ahora hago el cálculo respectivo

$p = 2\pi r = 2(3.1416)(15) = \mathbf{94.25\ cm}$

En la actividad anterior recordé la fórmula y el proceso para calcular el perímetro de la circunferencia

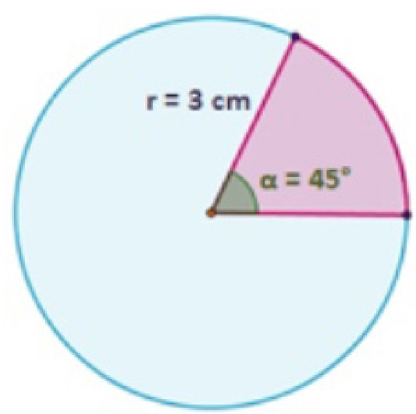
APRENDO

La longitud del perímetro de una circunferencia, viene dado por la fórmula: $p = 2\pi r$

¿Qué sucede si me piden que no encuentre todo el perímetro; sino que solo una parte?

¿Cómo tengo que hacerlo? ¿Qué datos son importante conocer?

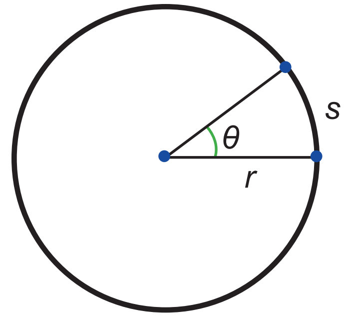
Por ejemplo, me dicen que encuentre la longitud marcado con rojo de esta circunferencia. Para medir solo una parte del perímetro y aplico una regla de tres simple; por ejemplo, en este caso, hay que calcular la parte del perímetro que corresponde a un ángulo central de t = 45°, planteo el proceso de la siguiente manera:



Longitud	Angulo central	
2πr (circunferencia)	360°	$x = \frac{45° \times 2\pi r}{360°} = \frac{\pi}{4} r$
x (arco)	45°	

De donde generalizo que la fórmula es:

$$\boldsymbol{s = \frac{\pi r t}{360°}}$$



"s" es la "longitud de arco" o segmento de perímetro, "t" es el ángulo central de la circunferencia y "r" es el radio de la circunferencia.

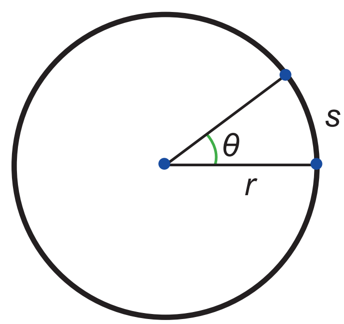
Si me piden el mismo ejercicio, pero cambiando a radianes primero, entonces tengo que 45°=$\frac{\pi}{4}$ rad

Longitud	Angulo central	
2π r	2π rad	$x = \frac{\frac{\pi}{4}\, rad \times 2\pi r}{2\pi\, rad} = \frac{\pi}{4} r$
x	$\frac{\pi}{4}$ rad	

La fórmula para la longitud de arco usando el ángulo central en radianes es:

$$\boldsymbol{s = rt}$$

***t* en radianes**

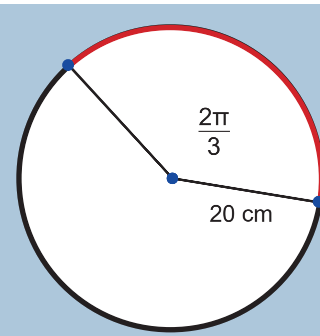


Ejemplo 1: Calculo la longitud de arco de un sector circular, cuyo ángulo central mide $\frac{\pi}{10}$ rad y el radio de la circunferencia es de 17 cm.

Se tiene que: $r = 17\ cm, \quad t = \frac{\pi}{10}$

Como: $s = rt$, entonces $s = (17cm)\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{17\pi}{10}\ cm = 5.3\ cm$

Ejemplo 2: Calculo la longitud del arco indicado en la figura de la derecha, cuyo ángulo central es: $\frac{2\pi}{3}$ y su radio es de 20 cm.



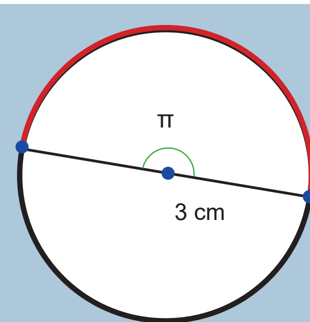
$$s = rt$$
$$s = (20)\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$s = \frac{40\pi}{3}$$
$$\boldsymbol{s = 41.9\ cm \quad R/}$$

Ejemplo 3: Calculo la longitud de una semicircunferencia cuyo diámetro es de 3 metros.

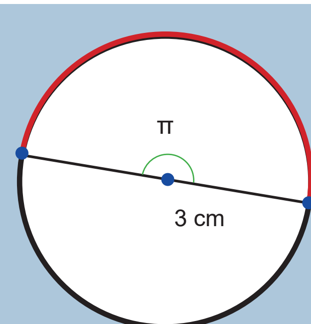
Como el diámetro es d = 2r

Entonces: $r = \frac{3}{2}$

$$s = rt$$
$$s = \left(\frac{3}{2}\right)(\pi)$$
$$s = \frac{3\pi}{2}$$
$$\boldsymbol{s = 4.71\ m \quad R/}$$



Ejemplo 4: Calculo la longitud del arco que recorre la punta de una aguja minutera de 7 cm de largo en un reloj análogo cuando avanza 20 minutos.



Para encontrar el ángulo central correspondiente a 20 minutos, aplico la relación: $\theta = \frac{20}{60}(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$

$$s = rt$$
$$s = (7)\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$s = \frac{3\pi}{2}$$
$$\boldsymbol{s = 4.71\ m \quad R/}$$

Evalúo mi aprendizaje

CRITERIO	SÍ	NO
He aprendido cómo calcular la longitud de arco usando ángulo central en grados.		
He aprendido cómo calcular la longitud de arco usando ángulo central en radianes.		

PRACTICO

Realizo los siguientes ejercicios en mi cuaderno

1

El marco superior de una puerta ventana tiene forma semicircular, si el ancho de la ventana es de 2 metros ¿Cuál es la longitud del marco superior?

2

¿Cuál es la longitud de arco de un puente que tiene una base de 3 metros de ancho?

3

Si un protector de un foco de semáforo cubre tres cuartas partes del mismo. ¿Cuál es la longitud del protector si el foco tiene un radio de 10 cms?

4

Una pizza familiar de ocho porciones iguales, tiene un radio de 20 cm. ¿Cuál es la longitud de la orilla curva de cada porción de pizza?

5

Un abanico tiene un radio de 15 cm, y se puede abrir hasta un ángulo de $\frac{4\pi}{3}$ rad ¿Cuál es la longitud del liston que decora el arco de la orilla del abanico?

APLICO

Elaboro en mi cuaderno de trabajo, una lista de 15 ejemplos de arcos de circunferencia, como dinteles de puertas, decoraciones de balcones, la media luna del área de portería en una cancha de futbol, arcos decorativos para carrozas, etc.

Anoto el respectivo radio y el ángulo central; ya sea en radianes o en grados para cada caso que sea posible, calculo las respectivas longitudes de arco. Luego comparto mi trabajo con algún amigo o compañero de trabajo.

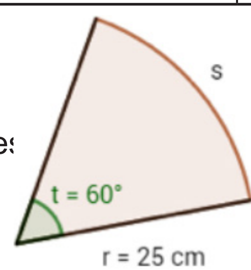
AUTOEVALUACIÓN

Resuelvo y relleno el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

1. Calcular la longitud de arco de un sector circular, cuyo ángulo central es de $\frac{2\pi}{5}$ rad y el radio de la circunferencia es de 55 cm.

A	11 cm	B	22 cm	C	34.5 cm	D	69.1 cm

2. La longitud del arco presentado en la ilustración es



A	8.3 cm	B	26.18 cm	C	78.54 cm	D	1750 cm

Respuesta: 1D; 2B

	A	B	C	D
1	○	○	○	○
2	○	○	○	○

SOLUCIONES
PRACTICO

1) 3.1416 cm
2) 4.7124 cm
3) 47.124 cm
4) 15.708 cm
5) 62.832 cm

BIBLIOGRAFÍA

- Ministerio de Educación, (2018) 1era Edición Matemática 9° ESMATE. San Salvador: Ministerio de Educación.

- Baldor, A. (2011). Geometría y trigonometría Baldor. 3era Ed. Distrito Federal: Larousse - Grupo Editorial Patria.

La presente edición cuenta con 1000 ejemplares impresos, distribuidos en 40 ejemplares por grado de cada una de las cinco asignaturas básicas del currículum nacional, Editorial Universidad Don Bosco, enero de 2019.

USAID

DEL PUEBLO DE LOS ESTADOS UNIDOS DE AMÉRICA

La realización de este documento fue posible gracias al apoyo del pueblo y Gobierno de los Estados Unidos de América, proporcionado a través de la Agencia de los Estados Unidos para el Desarrollo International (USAID). El contenido aquí expresado, en este documento, es responsabilidad exclusiva de FEDISAL y, el mismo, no necesariamente refleja las opiniones del Gobierno de los Estados Unidos.

FEDISAL Fundación para la Educación Integral Salvadoreña

FUSALMO COMPARTE • SUEÑA • TRANSFORMA

Funpres Educando mentes para promover sonrisas

Agape

Universidad Don Bosco