USAID
FROM THE AMERICAN PEOPLE

COMPÉTITIVITÉ ÉCONOMIQUE DU MAROC

CONCEPTS DE BASE DE LA MODELISATION HYDROLOGIQUE ET HYDRAULIQUE

APPORTS ET PRINCIPES D'UTILISATION DES OUTILS HEC, HEC-HMS ET HEC-RAS, PLATEFORME D'INTEGRATION WMS ET OUTIL RIBASIM

FASCICULE 4 : MODELISATION EN HYDRAULIQUE DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE - ECOULEMENTS NON PERMANENTS OU TRANSITOIRES (SAINT VENANT)

DATE : JUIN 2013 **MEC DOCUMENT 140fr**

Ce document a été préparé par DAI pour évaluation par l'Agence des États-Unis pour le développement international (USAID).

COMPÉTITIVITÉ ÉCONOMIQUE DU MAROC

CONCEPTS DE BASE DE LA MODELISATION HYDROLOGIQUE ET HYDRAULIQUE

APPORTS ET PRINCIPES D'UTILISATION DES OUTILS HEC, HEC-HMS ET HEC-RAS, PLATEFORME D'INTEGRATION WMS ET OUTIL RIBASIM

FASCICULE 4 : MODELISATION EN HYDRAULIQUE DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE-ECOULEMENTS NON PERMANENTS OU TRANSITOIRES (SAINT VENANT)

Soumis à USAID/Maroc, Bureau de croissance économique - Objectif d'aide n° 3 : Réduction des barrières au commerce et à l'investissement

Par DAI

Numéro de contrat : EEM-I-00-07-00009-00 : Ordre de mission : EEM-I-07-07-00009

L'opinion de l'auteur de ce document engage uniquement la responsabilité de ce dernier et ne reflète pas nécessairement le point de vue de l'Agence des États-Unis pour le développement international (USAID) ni celui du Gouvernement des États-Unis

Programme Compétitivité Economique du Maroc

8, rue du Rif

Souissi

10 000 Rabat

Maroc

Tel: (212) 05 37 63 05 59

Fax: (212) 05 37 63 05 61

andrew_watson@dai.com

Http://www.mecprogram.ma

TABLE DES MATIERES

Préambule : 1

Ecoulements non permanents ou transitoires (Saint Venant) 1

1. Introduction 1
2. Equations de base de Barré Saint Venant 15
    - 2.4.1. Introduction 22
    - 2.4.2. Modèles hydrauliques (dynamiques) 22
    - 2.4.3. Stabilité et précision 23
    - 2.4.4. Conditions aux limites 24
3. Modèles hydrologiques (Cinématiques) 25
4. Modèle de Muskingum 29
5. Références bibliographiques 30

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1. : Définitions 2
Figure 2 : Rivière naturelle / Sections transversales 5
Figure 3. : Nature d'écoulements (GV, RV,etc.) 7
Figure 5. : Définitions 7
Figure 6. : Onde positive 8
Figure 7. : Onde négative 8
Onde monoclinale 9
Onde simple ou solitaire 9
Figure 8. : Train d'ondes 9
Figure 9. : Ecoulement non permanent 10
Figure 10. : Ecoulement permanent équivalent 10
Figure 11. : Forces agissant sur le volume de contrôle 11
Figure 12. : Onde positive 12
Figure 13. : Onde positive (raide). 13
Figure 14. : Ondes négatives 13
Figure 15. : Longueur du ressaut 14
Figure 16. : Schéma illustratif 15
Figure 18. : Schéma de calcul (dynamique) 17
Figure 19. : Schéma de calcul (dynamique) 19
Figure.20. : Progression d'une onde 25
Figure 21. : Onde monoclinale 26
Figure 22. : Onde cinématique 29
Figure 23. : Schéma de Muskingen 30

PREAMBULE

ECOULEMENTS NON PERMANENTS OU TRANSITOIRES (SAINT VENANT)

1. Introduction

L'écoulement transitoire est un écoulement non permanent : le tirant d'eau et / ou la vitesse dans une section donnée sont variables avec le temps. Quelques exemples d'écoulements transitoires :

- Crues des rivières
- Marées dans les océans et estuaires
- Intumescences dans les canaux d'assainissement ou des centrales hydrauliques

Les écoulements transitoires sont classés en fonction du degré de variation du débit et du tirant d'eau, en écoulements ; on distingue :

- Les écoulements Rapidement Variés (ERV), et
- Les écoulements Graduellement Variés (EGV)

ERV : La surface de l'eau présente une discontinuité (déferlement, vague,), par exemple dans le cas d'une surpression dans un canal de centrale hydraulique causée par un changement brusque de la charge.

EGV: La variation de la surface libre est graduelle, par exemple, onde de crue dans une rivière, ou marée sans formation de discontinuité

1.1. Régimes relatifs à l'espace et le temps-Equations de base

La variation des caractéristiques hydrauliques des écoulements à surface libre peut être établie à partir de l'expression mathématique des écoulements ; expressions mathématiques généralement de type Manning ou Chezy. On fera des illustrations sur la base de l'une ou l'autre des méthodes.

La pente est très variable avec les régimes des écoulements. Cette variabilité est illustrée par l'équation dynamique du mouvement des eaux de surface.

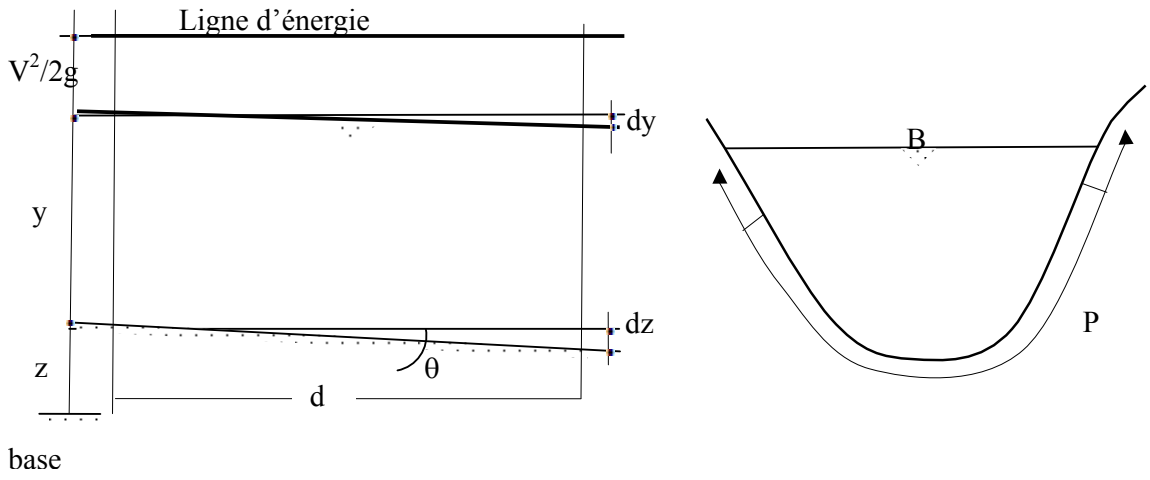

Figure 1. : Définitions

avec,

$h = z = y$: Hauteur piézométrique (énergie potentielle)

$H = h + \frac{v^2}{2g}$: Hauteur spécifique (énergie totale)

v :Vitesse moyenne dans la section

L'inventaire des forces agissant sur l'élément de volume Adx, de masse m =ρ Adx, donne les trois types suivants

Pesanteur $F_g = -\gamma A\, dz$
Pression $F_p = -\gamma A\, dy$
Frottement $F_{fg} = -\tau_0 P\, dx$

Avec
$\gamma = \rho g$ et τ_0 :Tension due au frottement.

L'application de la 2ème loi de la dynamique

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

Avec l'accélération de l'écoulement donnée par l'expression

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial t}$$

Donne l'égalité suivante

$$-Adh - \tau_0 P dx = Adx\left(V\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

avec

dh = dz + dy , puisque h = z + y

dh, dz et dx sont suffisamment petits. On aboutit après quelques réarrangements à l'équation suivante,

$$\frac{\tau_0}{\gamma R} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Par définition le premier terme de cette expression est égal à la pente de frottement S_f. En notant que ;

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = -S_0 + \frac{\partial y}{\partial x}$$

Et que le terme

$$\frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

L »équation précédente peut s »écrire

$$S_f + \frac{\partial}{\partial x}\left(z + y\frac{V^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Soit

$$S_f + S_H + S_a = 0$$

Avec

S_0 : Pente du radier
S_H : Pente d'énergie totale
S_a : Pente d'accélération

Ainsi la somme des pentes de frottement, d'énergie totale et d'accélération est nulle. En d'autres termes les pertes par frottement sont balancées par la somme des pertes d'énergie totale et d'accélération.

$$S_f = -(S_H + S_a)$$

En remplaçant S_H et S_a par leurs expressions dans l'équation précédente, on obtient

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

La substitution de cette expression de S_f dans l'équation du débit (Ici on emprunte celle de Chezy pour illustrer les ordres de grandeur) des écoulements à surface libre permet de distinguer les régimes suivants

$$Q = AC\sqrt{R\left(S_0 - \frac{\delta y}{\delta x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}\right)}$$

Ecoulement uniforme permanent

Ecoulement non uniforme permanent

Ecoulement non uniforme non permanent

Cas des cours d'eaux naturels

Une idée sur l'ordre de grandeur des différentes pentes dans l'expression précédente du débit est donnée par l'exemple suivant d'écoulement transitoire.

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

Pour les cours d'eau naturels la pente du fond reste la plus importante même dans les crues les plus exceptionnelles.

Pour les pentes moyennes et fortes $S_0 < 2‰$

$S_f = S_0$ est une bonne approximation

Régime uniforme permanent

Pour les pentes faibles $S_0 > 2‰$

$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x}$ est suffisante pour une bonne description de la propagation des crues.

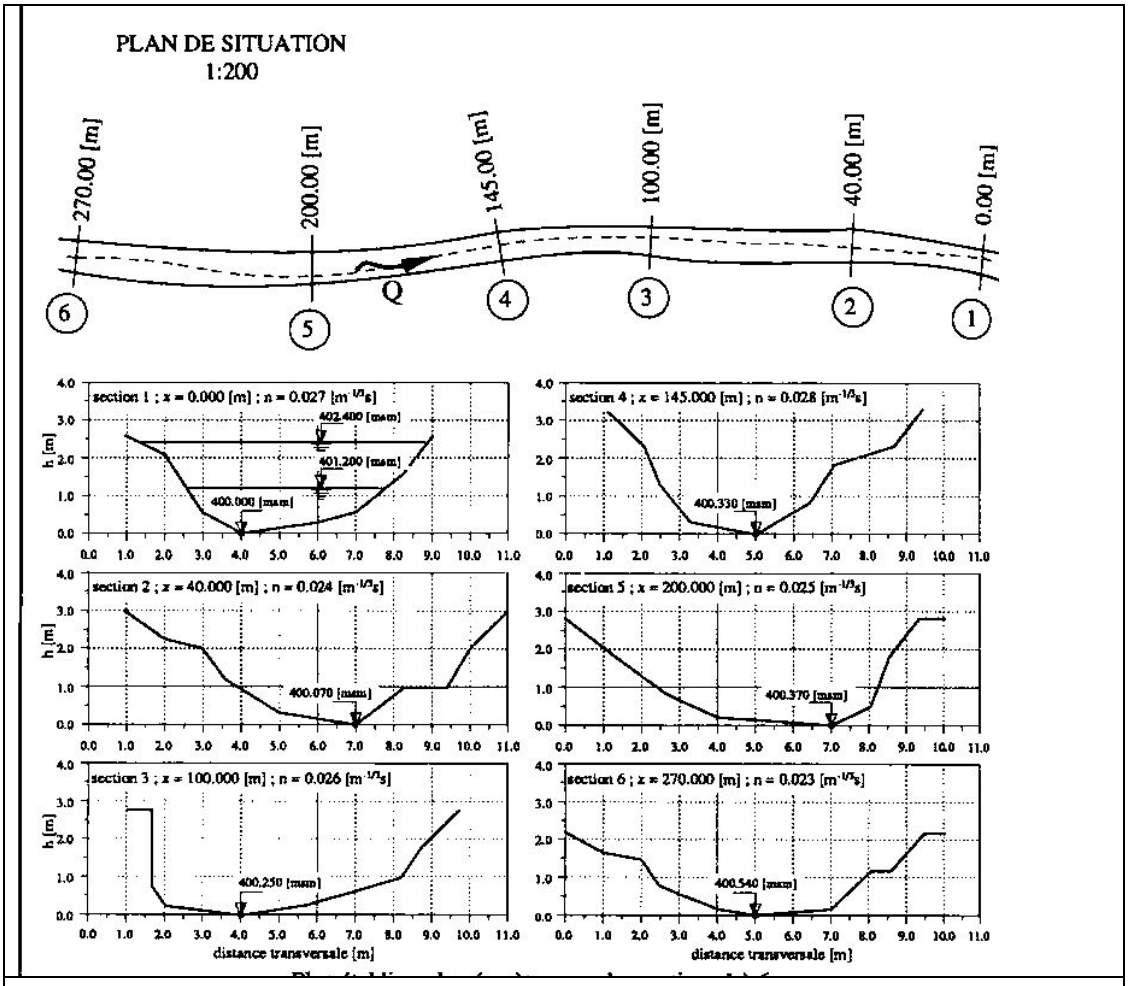

Figure 2 : Rivière naturelle / Sections transversales

1.2. Régimes relatifs à la nature des écoulements

Effet de la viscosité

L'écoulement est laminaire, turbulent ou transitoire en fonction du rapport des forces d'inertie et des forces de viscosité F_I / F_V appelé couramment Nombre de Reynolds Re.

$Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$ Rapport des forces

Ce rapport est représenté par le nombre de Reynolds

Le régime transitoire est marqué par un nombre de Reynolds de l'ordre de 500 (2000 pour les conduites en charge).

- V :Vitesse moyenne
- L : Longueur caractéristique = Rayon hydraulique pour les écoulements à surface libre
- ν :Viscosité cinématique (L^2/T)

Si

$Re < 500$	Régime laminaire
$500 < Re < 1250$	Régime turbulent
$Re > 1250$	Régime transitoire

1.3. Régimes relatifs à la prédominance du type d'énergie

Effet de la gravité

L'effet de la pesanteur sur les écoulements à surface libre est représenté par le rapport des forces d'inertie aux forces de gravité. Ce rapport est mesuré par le Nombre de Froude.

$$F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot L}} = \frac{V}{C}$$

Avec

V :Vitesse moyenne

G :Accélérateur de la pesanteur

L : Longueur caractéristique $= D = \frac{d}{B}$ pour les écoulements à surface libre

D : Hauteur hydraulique

C : Célérité ou vitesse critique

$Si\ F = 1$	,	$V = C$	Ecoulement critique
$Si\ F < 1$	,	$V < C$	Ecoulement fluvial (subcritique)
$Si\ F > 1$	,	$V > C$	Ecoulement torrentiel (super critique)

1.4. Aspects ondulatoires/Intumescences des écoulements transitoires à surface libre

Les écoulements transitoires sont souvent associés à la propagation d'ondes. Une onde est définie comme une variation temporelle ou spatiale du débit ou de la surface de l'écoulement.

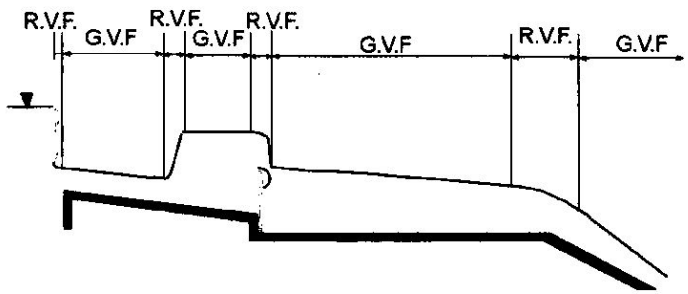

Figure 3. : Nature d'écoulements (GV, RV,etc.)

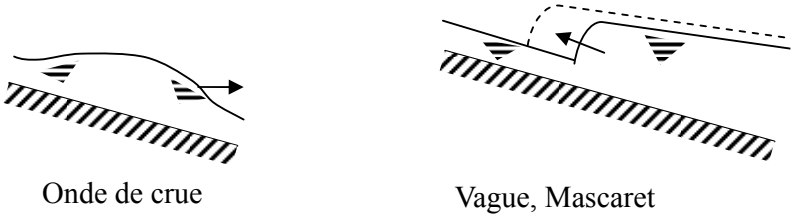

Figure 4. : Types d'onde

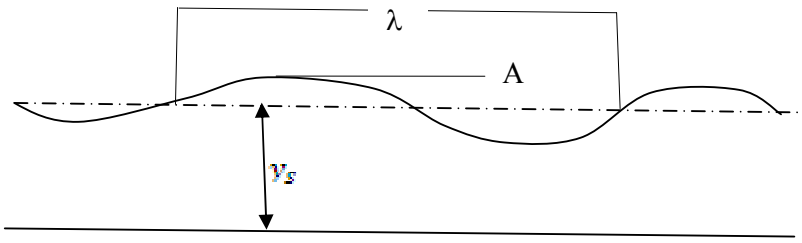

Figure 5. : Définitions

A : Amplitude
λ : Longueur d'onde
y_s : Niveau d'eau de l'écoulement uniforme.

Célérité de l'onde (C) : C'est la vitesse relative de l'onde par rapport au milieu de propagation (eau). Il faut bien noter que C est différente de la vitesse de l'écoulement V, avec laquelle les particules du liquide se déplacent sous l'effet de la propagation de l'onde.

Vitesse absolue de l'onde V_W : C'est la somme vectorielle de la célérité C est la vitesse de l'écoulement V.

$$\vec{V}_W = \vec{V} + \vec{C}$$

Dans les cas d'un écoulement unidirectionnel, la célérité de l'onde est soit positive, soit négative selon qu'elle est dirigée vers l'aval ou vers l'amont respectivement.

$V_W = V \pm C$ + onde aval ; - onde aval

Autres classifications d'ondes

Ondes d'eaux basses (Shallow water waves)

$\lambda \gg 2\, y_s$ où $\frac{\lambda}{y_s} \gg 2$

Ondes d'eaux profondes (deep-water waves)

$\lambda \ll 2\, y_s$ où $\frac{\lambda}{y_s} \ll 2$

Note ; Cette classification est basée sur le rapport $\frac{\lambda}{y_s}$ et non pas sur la profondeur y_s toute seule.

Ainsi une onde courte même en eau basse, si $\lambda \ll 2\, y_s$, est appelée onde d'eaux profondes. Et une onde très longue, même dans les eaux les plus profondes d'un océan, si $\lambda \gg 2\, y_s$, est appelée onde d'eaux basses.

Onde positive : La surface de l'onde est supérieure à la surface de l'écoulement permanent

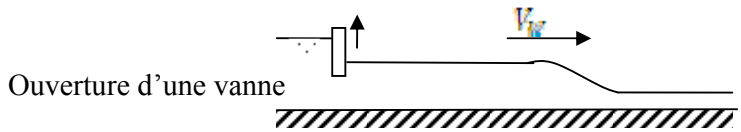

Figure 6. : Onde positive

Onde négative : la surface de l'onde est inférieure à la surface de l'écoulement permanent.

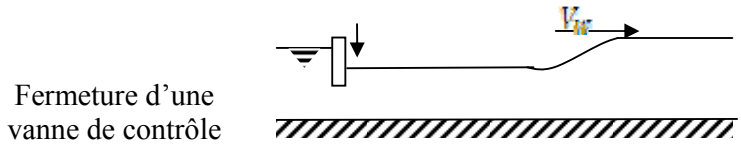

Figure 7. : Onde négative

Onde mobile : Les particules se déplacent dans l'espace avec l'onde, V ≠ 0. (Intumescences, surpression,

marées, crues)

Onde stationnaire : Il n'y a pas de mouvement des particules (V = 0) avec l'onde (vagues dans la mer)

Onde monoclinale : Onde à une seule branche, descendante ou ascendante

Onde monoclinale

Onde à deux branches graduellement descendantes ou ascendantes respectivement

Onde simple ou solitaire

Une succession d'ondes est appelée train d'ondes

Figure 8. : Train d'ondes

1.5. Causes des écoulements transitoires

Un écoulement transitoire à surface libre se produit chaque fois que des changements de débit et / ou du tirant d'eau se produisent dans une section donnée. De tels changements peuvent être volontaires ou accidentels, comme ils peuvent être causés par l'homme ou la nature.

Quelques exemples et causes des écoulements transitoires à surface libre les plus fréquents sont :

- Inondations des rivières, des ruisseaux et des lacs, causées par les précipitations, la fonte des neiges et les opérations des vannes de contrôle.
- Surpressions (intumescences) dans les canaux lors de la mise en service et l'arrêt des turbines, le démarrage et l'arrêt des pompes où l'ouverture et la fermeture des vannes de contrôle.
- Surpressions dans les canaux de navigation lors de l'opération des écluses.

- Les crues dans une rivière ou un barrage à la suite de la rupture d'un barrage (dam break)
- Circulation des eaux dans les lacs et grands réservoirs sous l'action du vent.
- Ecoulements des eaux dans les réseaux d'assainissement pluvial.
- Marées dans les estuaires et les entrées des rivières.

1.6. Hauteur et célérité d'une onde (surpression, intumescence)

A l'instant t = 0 on a un écoulement permanent de débit Q_1 à Q_2. Cette augmentation de débit donne une onde de hauteur W se déplaçant vers l'aval.

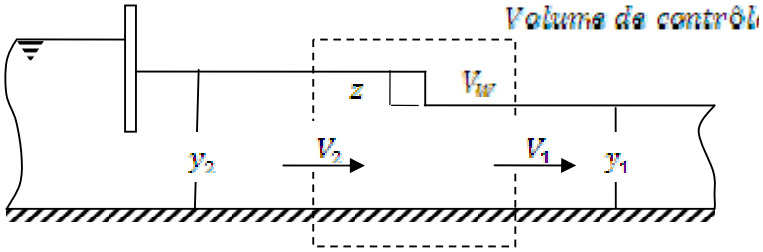

Figure 9. : Ecoulement non permanent

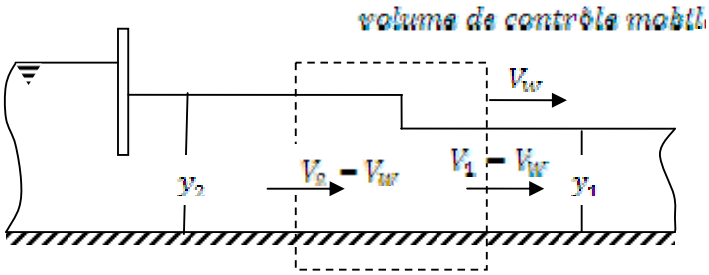

Figure 10. : Ecoulement permanent équivalent

Le volume de contrôle se déplace à la vitesse absolue V_W de l'onde. Relativement à ce volume de contrôle l'onde est stationnaire et l'écoulement est permanent.

L'équation de continuité s'écrira,

$$A_1 (V_1 - V_W) = A_2 (V_2 - V_W)$$

En supposant que la distribution des pressions est hydrostatique dans les sections 1 et 2, que le canal est horizontal, et en négligeant les frottements, les forces agissant sur le volume de contrôle seront

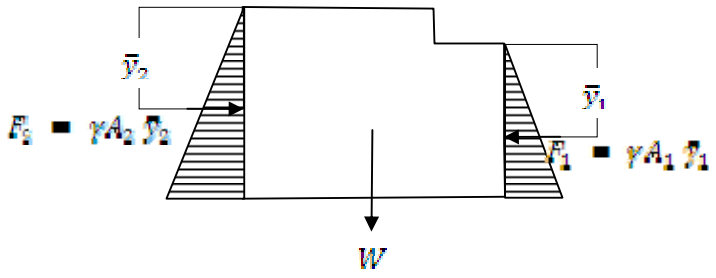

Figure 11. : Forces agissant sur le volume de contrôle

$\bar{y}_1, \bar{y}_2$ profondeurs des centres de gravité (c.d.g.) de A_1 et A_2.

Le changement de la quantité de mouvement entre les sections 1 et 2 du volume de contrôle est de, m Δ V.

$$\frac{\gamma}{g} A_1 (V_1 - V_W)\ (V_1 - V_W) - (V_2 - V_W) = \frac{\gamma}{g} A_1 (V_1 - V_W)\ (V_1 - V_2)$$

La force résultante agissant sur le volume de contrôle est dirigée vers l'aval est d'intensité

$$F = F_2 - F_1 = \gamma (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)$$

L'application de la deuxième loi de la dynamique (Newton) donne

$$F = m\ \Delta\ V$$

$$\gamma (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) = \frac{\gamma}{g} A_1 (V_1 - V_W)\ (V_1 - V_2)$$

L'élimination de V_2 entre les deux équations donne après quelques réarrangements.

$$(V_1 - V_W)^2 = \frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)$$

Puisque l'onde est dirigée vers l'aval, sa vitesse est plus grande que la vitesse initiale V_1 d'où l'équation suivante,

$$V_W = V_1 + \sqrt{\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)}$$

Si la vitesse V1 = 0

$$V_W = \sqrt{\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)}$$

Et puisque par définition c = $V_W - V_1$, on a

$$C = \pm \sqrt{\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)}$$

- + onde se déplaçant vers l'aval
- - Onde se déplaçant vers l'amont

Une relation entre les vitesses et les tirants d'eau des sections 1 et 2 peut être obtenue e éliminant V_W

entre les équations 1 et 2.

$$A_2\, y_2 - A_1\, y_1 = \frac{A_1 A_2}{g(A_2 - A_1)}(V_1 - V_2)^2$$

Dans les équations 1 et 5 on a cinq variables $(y_1 V_1, y_2 V_2, V_W)$. En général V_1 et V_2 sont calculées itérativement à partir de ces 2 équations avec les trois autres variables connues. La hauteur de l'onde Z est par suite calculée comme $Z = y_2 - y_1$.

Il faut noter que les équations 4 et 5 sont générales et peuvent être utilisées pour des canaux) secion quelconque

Cas particulier d'un canal rectangulaire

Pour un canal rectangulaire la largeur est B constante

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}\, y_1$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2}\, y_2$$

$$A_1 = B\, y_1$$

$$A_2 = B\, y_2$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation 4 donne

$$C = \sqrt{\frac{g\, y_2}{2\, y_1}(y_2 + y_1)}$$

Remarques

Si l'onde est de hauteur très faible, alors ,

$$Z = y_2 - y_1 \ll y_1$$

$y_1 = y_2 = y$, et

$$C = \sqrt{g\, y}$$

Une onde peut être considérée comme la superposition d'une infinité d'ondes infinitésimales se propageant à la vitesse (célérité)

$$C = \sqrt{g\, y}$$

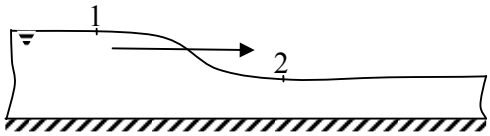

Figure 12. : Onde positive

Les points 1 et 2 de l'onde positive ont des tirants d'eau différents, d'où la célérité du point 1 sera plus grande que celle du point 2 (front de l'onde).

$y_1 > y_2 \rightarrow \sqrt{g\,y_1} > \sqrt{g\,y_2}$ soit $C_1 > C_2$

Et les vitesses absolues

$V_{W_1} > V_{W_2}$, $(V_W = V + C)$

Ainsi le point 1 aura tendance à rattraper le point 2 et le front de l'onde sera de plus en plus raide.

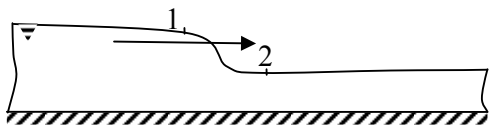

Figure 13. : Onde positive (raide).

Un déferlement aura lieu quand le point 1 dépasse le point 2. Une onde négative sera de plus en plus aplatie (amortie) en se déplaçant dans un canal.

Figure 14. : Ondes négatives

On sait que pour un écoulement fluvial, $F < 1$, F = Nombre de Froude , soit

$$F = \frac{V}{\sqrt{g\,y}} < 1 \qquad \rightarrow \qquad V < C$$

La vitesse absolue de l'onde, $V_W = V \pm C$, est négative si l'onde est dirigée vers l'amont et vers l'aval.

Pour un écoulement torrentiel, $F > 1$, soit $V > C$, la vitesse absolue de l'onde sera toujours positive, et les perturbations ne se déplaceront que vers l'aval $(V_W > 0)$.

Pour un canal rectangulaire, l'équation de continuité prend la forme

$$B\,y_1(V_1 - V_W) = B\,y_2(V_2 - V_W)$$

D'où

$$V_W = \frac{Y_1V_1 - Y_2V_2}{Y_1 - Y_2}$$

Pour une onde positive $V_W = V_1 + C$. Les équations 6 et 7 donnent une relation entre vitesses et tirants d'eau une fois substituées dans cette expression

$$(V_1 - V_2)^2 = \frac{g(y_1 + y_2)}{2\, y_1 . y_2} (y_1 - y_2)^2$$

La formule suivante peut être utilisée pour calculer itérativement y_2 ; connaissant V_2,

$$y_2 = y_1 + \sqrt{\frac{2\, y_1 y_2 (V_1 - V_2)^2}{g(y_1 + y_1)}}$$

En posant $y_2 = y_1$ pour la 1ère itération

1.7. Intumescence et Ressaut hydraulique

Une Intumescence est une onde de gravité, régie par la pesanteur, de célérité.

$$C = \sqrt{g\, y}$$

Et de vitesse absolue ; $V_W = V \pm C$

Si $V \ll C$, régime fluvial, V_W peut être positive, ou négative, l'onde se déplace vers l'aval ou vers l'amont.

Si $V \gg C$, régime torrentiel, V_W sera toujours positive, et l'onde ne pourra se déplacer que vers l'aval.

Si V = C, régime critique, une onde se déplaçant vers l'amont aura une vitesse absolue

Si $V_W = V - C = 0$

D'après l'équation des écoulements permanents graduellement variés (courbes de remous)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \frac{V^2}{C^2}} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F_r^2} = \infty \qquad si\ F_r = 1$$

La surface de l'écoulement est théoriquement verticale, on aura un passage brusque d'un écoulement supercritique (torrentiel) à un écoulement subcritique (fluvial)

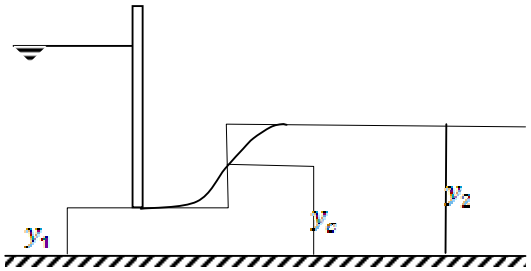

Figure 15. : Longueur du ressaut

La longueur du ressaut (distance sur laquelle on a passage de y_1 à y_2 est théoriquement nulle.

2. Equations de base de Barré Saint Venant

2.1. Hypothèses

L'établissement des équations régissant les écoulements transitoires à surface libre est basé sur les hypothèses suivantes.

- La pente naturelle □ est petite, $\sin\theta = \tan\theta = \theta$
- La distribution de pression dans une section donnée est hydrostatique. Ce qui est vrai si l'accélération verticale est faible, c'est le cas des écoulements graduellement variés
- Les pertes de charges dues aux frottements sont calculées par les formules des écoulements permanents usuelles (Manning, Chezy, etc.).
- La distribution des vitesses est uniforme.
- Le canal est droit et prismatique (pas de courbure importante ou de changement notable de section).

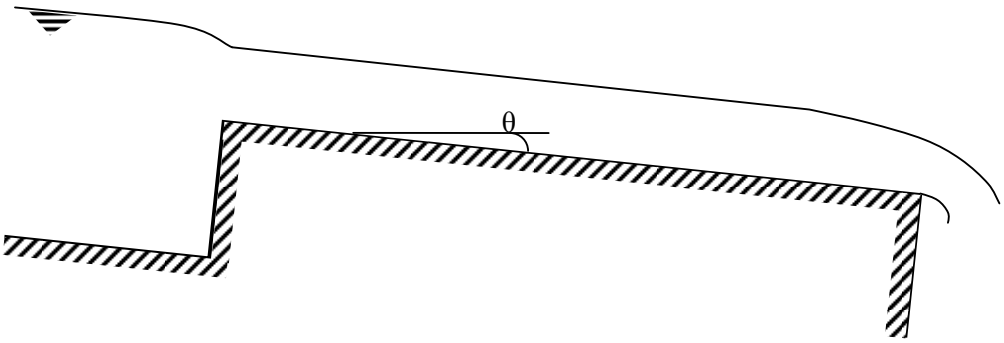

Figure 16. : Schéma illustratif

2.2. Equations de continuité (conservation de masse)

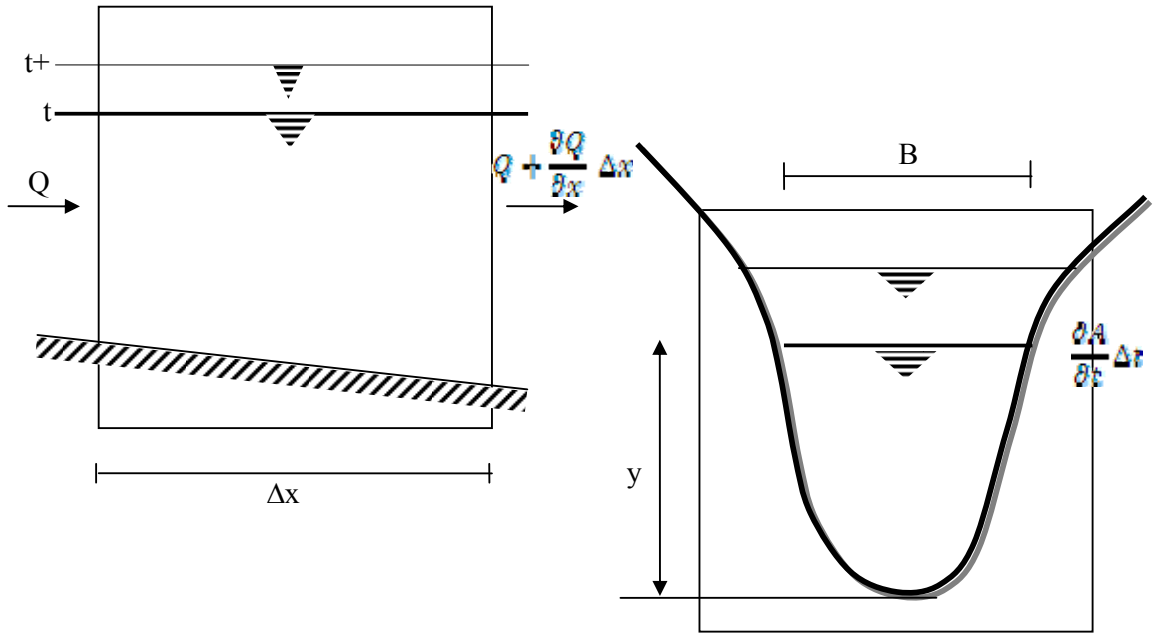

Figure 17. : Volume de contrôle

D'après le principe de conservation de mase dans le volume de contrôle, la différence entre les volumes entrants et sortants du volume de contrôle est égale à la variation du volume stocké dans le volume de contrôle.

$$\frac{\partial A}{\partial t}\Delta t\,\Delta x = -\frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\ \Delta t$$

Soit :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Une autre forme de l'équation de continuité peut être dérivée :

En notant que,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dy}\frac{\partial y}{\partial t} = B(y)\frac{\partial y}{\partial t}$$

L'équation de continuité peut être réécrite comme suit :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B(y)\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Pour une section donnée :

Q = V.A

d'où

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (V.A)}{\partial x} = A\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial A}{\partial x}$$

Par substitution dans l'équation de continuité ; on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial A}{\partial x} + B\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Comme $D = \frac{A}{B}$ et que $\partial A = B\partial y$, on peut s'écrire,

$$D\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Pour un canal non prismatique ou A = A(x,y) et si on a en plus un débit latéral (qL) par unité de longueur, l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\delta x} + V\frac{\partial A}{\partial x} = q_1$$

Avec $q_L > 0$ *flux rentrant et* $q_L > 0$ *flux sortant.*

2.3. Equation dynamique

Par application de la deuxième loi de la dynamique,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

a étant l'accélération, m la masse, F représente le terme Forces.

à l'élément de liquide du volume de contrôle, on peut développer l'équation dynamique.

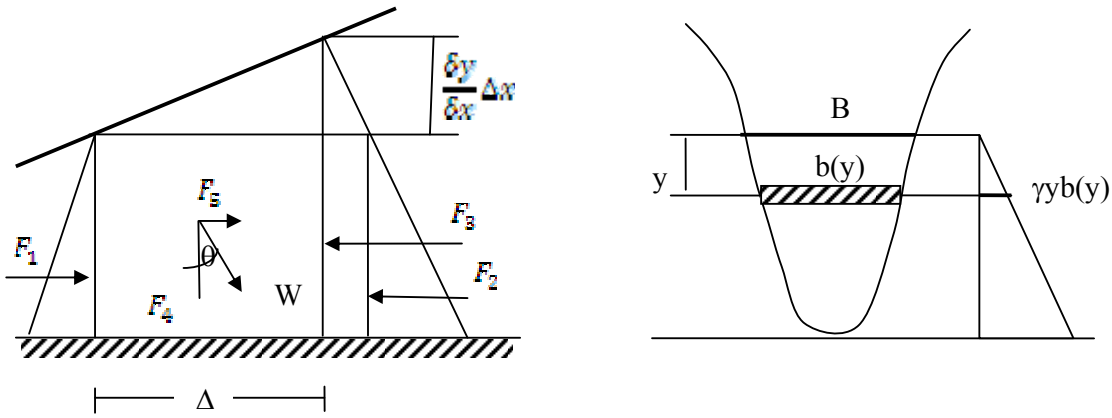

Figure 18. : Schéma de calcul (dynamique).

comme

$$F = \int_0^h y b(y)\, dy$$

$$A\bar{y} = \int_0^h y b(y)\, dy$$

$$F = \gamma A y$$

y représente la position verticale du centre de gravité (CDG).

Faisons maintenant l'inventaire des forces en jeu,

Forces de Pressions :

$$F_1 = \gamma A \bar{y}$$

$$F_2 = \gamma A \bar{y}$$

$$F_3 = \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$$

$$F_4 + F_3 = \gamma \int \left(y + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x \right) \quad b(y)\ dy - \gamma \bar{y} A \int \gamma \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x A$$

Forces de frottement

$$F_4 = \gamma A \Delta x_n S_f$$ S_f étant la pente de frottement

S_f peut être évaluée par les formules de perte de charge en régime permanent

Manning,

$$S_f = \frac{V^2}{K^2 R^{4/3}}, \quad K = \frac{1}{n}$$

Chezy,

$$S_f = \frac{V^2}{C^2 R}$$

Forces de pesanteur

$$F_2 = A\, \Delta x\, S_0,$$ S_0 étant la pente naturelle du lit

La masse d'eau dans le volume de contrôle =

$$m = \frac{\gamma}{g} A\ \Delta x$$

L'accélération de cette masse est

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} = V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

La projection de l'équation (1) sur la direction de l'écoulement donne,

$$-F_3 - F_4 + F_2 = m\,a$$

Soit,

$$-\gamma A \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x - \gamma A S_f \Delta x + \gamma A S_0 \Delta x = \frac{\gamma}{g} A \left(V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

En faisant quelques arrangements, on aboutit à :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g\frac{\partial y}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} = g(S_0 - S_f)$$

On peut aussi établir l'équation dynamique sur d'autres concepts liés à l'énergie :

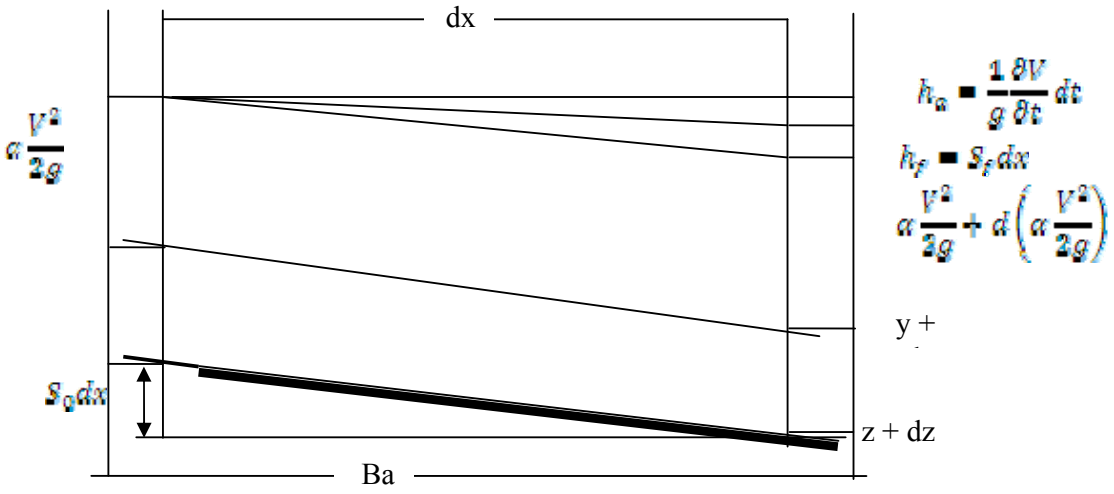

Figure 19. : Autre méthode d'établissement

La force d'accélération agissant sur un élément de volume de poids W est égale à $\frac{W}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$, autrement dit, force = masse .accélération.

On a admis que la pente S0 est faible, que l'accélération est dans la direction de x, et que sa composante verticale est négligeable. Ainsi le travail accompli par cette force sur une distance dx entre les sections 1 et 2 est $\frac{W}{g}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$ dx, cette quantité de travail est égale à l'énergie perdue par accélération.

En divisant par W, le perte en hauteur ha sera égale à $\frac{1}{g}\frac{\partial y}{\partial x}$dx .

La perte totale en hauteur comprend deux parties :

perte par frottement $h_f = S_f \Delta x$

perte due à l'accélération de pente $\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$

Pour le principe de conservation d'énergie entre les sections 1 et 2 on a :

$$z + y + \alpha\frac{V^2}{2g} = z + dz + y + dy + \frac{\alpha V^2}{2g} + d\left(\alpha\frac{V^2}{2g}\right) + S_f\,dx + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}\,dx$$

$$d\left(z + y + \alpha\frac{V^2}{2g}\right) = -S_f\,dx - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}dx$$

$$dH = -S_f\,dx - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}dx$$

La variation de l'énergie totale est égale à la somme des pertes par frottement et par accélération.

En écoulements transitoires, la variation de la hauteur d'énergie totale est fonction de ha et hf. Pour les écoulements permanents, dH dépend entièrement du frottement.

Après division par dx et passage aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \alpha\frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial g} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} = S_0 - S_f$$

α = coefficient de pondération d'énergie cinétique, pour tenir compte de la non uniformité de la distribution de vitesse dans la section (α =1 pour distribution uniforme).

Autre forme de l'équation dynamique

Pour un canal non prismatique avec un débit latéral (ql= par unité de longueur, l'équation dynamique prend la forme,

$$F = \frac{d}{dt}(m\,V)$$

$$\frac{d}{dt}(mV) = m\frac{dV}{dt} + V\frac{dm}{dt}$$

$$\rho\,A\,\Delta x\,\frac{dV}{dt} + (V - U_1)\rho\,q\,\Delta x$$

U1 : vitesse de l'écoulement latéral dans la direction x.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}$$

L'équation finale est,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}\frac{g}{A}\frac{\partial(\bar{y}A)}{A} - \frac{(V-U_1)_x}{A} = g\,(S_0 - S_f)$$

Pour un canal rectangulaire, ou si B >>y,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{(V-U_1)\,q}{Q} = g(S_0 - S_f)$$

Les équations dynamiques et de continuité sont connues sous le nom d'équations de Saint Venant, et constituent la base pour la résolution des problèmes des écoulements transitoires.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \text{continuité}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g\frac{\partial y}{\partial x} + V\frac{\delta y}{\delta x} = g(S_0 - S_f) \text{ dynamique}$$

L'équation dynamique peut s'exprimer en termes du débit Q à la place de V,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{A}\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{A^2}\frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ et}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A^2}\right)$$

$$= \frac{Q}{A^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^3}\frac{\partial A}{\partial x}$$

La substitution de ces expressions dans l'équation dynamique donne

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gA^2}\frac{\partial Q}{\partial x} + \left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - S_f$$

Sachant que, $F_r = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{g\,D}} = \frac{Q}{A\sqrt{g\frac{A}{B}}}$, soit $F_r^2 = \frac{B\,Q^2}{g\,A^3}$

L'équation dynamique s'écrira,

$$\frac{1}{g\,A}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\,A^2}\frac{\partial Q}{\partial x} + (1 - F_r^2)\frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - S_f$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2}\right) + gA\frac{\partial y}{\partial x} = gA(S_0 - S_f)$$

En notant que,

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2}\right) = \frac{2Q}{A^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2 B}{A^3}\frac{\partial y}{\partial x}$$

2.4. Modèles mathématiques de propagation des crues

2.4.1. Introduction

Les modèles de propagation des crues sont d'une grande importance pour l'annonce des crues, le dimensionnement des réservoirs, la simulation des bassins versants, et de manière plus générale l'étude des projets liés aux ressources en eaux et à leur aménagement.

Ces modèles constituent un outil pour la prédiction des variations spatiales et temporelles des ondes de crue pendant qu'elles traversent les rivières ou les retenues de barrages (réservoirs). Ils permettent aussi la prédiction des débits de sortie (hydrogramme) d'un bassin versant à la suite d'une averse donnée.

On distingue deux types de modèles de propagation des crues ; à savoir :

- Modèles dynamiques ou hydrauliques
- Modèles cinématiques ou hydrologiques

Les modèles hydrauliques sont basés sur la résolution des équations bien connues de Saint Venant (continuité et dynamique) qui régissent les écoulements transitoires à surface libre. Ces modèles de par leur nature intégrant tous les aspects, permettent une meilleure description de la dynamique des écoulements que les modèles hydrologiques, d'où le nom qui leur est attribué de modèles dynamiques.

Les modèles hydrologiques sont basés sur la résolution de l'équation de continuité seulement et d'une autre relation, soit analytique (théorique) soit hypothétique entre le volume stocké et le débit de sortie dans le système. Ce sont les modèles les plus utilisés pour l'étude de la propagation des crues dans les milieux naturels, d'où le nom de modèles hydrologiques.

2.4.2. Modèles hydrauliques (dynamiques)

Les modèles hydrauliques utilisent à la fois les équations dynamique et de continuité qui sont mathématiquement représentées par des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et par conséquent de nature ondulatoire. Il est bien connu que dans le cas général, elles n'admettent pas de solution analytique, par conséquent on a toujours recours à des solutions numériques sur ordinateur et très souvent par les méthodes des caractéristiques explicites ou implicites.

Equation de continuité

$$A\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_i$$

q_l : Débit latéral moyen (précipitation nette) sur un élément Δx .

Pour une largeur unitaire (rivière très large A= B .y) on aura,

$$H_1 = y\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} - q_l = 0$$

Equation dynamique

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{A}\frac{\partial (yA)}{A} + \frac{Vq_l}{A} = g(S - S_0)$$

Si A = By,

$$H_2 = \frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{V}{y}q_l - g(S - S_0) = 0$$

Ces équations sont valables pour l'étude de la propagation des crues dans un tronçon de rivière, un réservoir ou un bassin versant. Les conditions initiales et aux limites sont exigées évidemment pour toute possibilité de solution.

2.4.3. Stabilité et précision

La stabilité et la précision de tous les schémas numériques explicites de calcul sont contrôlées par les valeurs des pas de temps t et pas de l'espace x.

La condition de stabilité pour ces schémas est donnée par la condition CFL (Courant – Friedrichs – Lewy).

$$\frac{dt}{dx} < \frac{1}{V+C}$$

ou tout simplement de Courant :

En pratique, on introduit un facteur f infiniment à 1 (0.9 généralement)

$$\Delta t = 0.9\frac{dx_{\min}}{(V+C)_{\max}}$$

pour assurer la stabilité en chaque point.

HEC RAS utilise un schéma implicite à 4 points inconditionnellement stable sous certaines conditions.

En pratique toutefois, certains facteurs peuvent contribuer à la non stabilité du schéma. Ces facteurs incluent :

- Le changement brusque dans les propriétés des sections transversales
- Le changement brusque de pentes de fonds

- Les caractéristiques de l'onde
- Les structures hydrauliques complexes, telles les puits, les déversoirs, les évacuateurs, les digues, les caniveaux, etc. ...

A cause des ces facteurs, toute application d'un modèle doit être accompagnée d'une étude de sensibilité, ou la précision et la stabilité de la solution doivent être testées avec différents pas de temps et d 'espace.

2.4.4. Conditions aux limites

Aux extrémités, il y a généralement une caractéristique seulement et une autre équation est nécessaire pour lever l'indétermination. C'est ce qu'on appellera condition aux limites. Elle est donc à spécifier.

On distinguer pour les écoulements à surface libre :

- Profondeur spécifiée – Condition Amont
- Profondeur spécifiée – Condition Aval
- Débit spécifié – Condition Amont
- Débit spécifié – Condition Aval

Pour les écoulements subcritiques, les conditions aux limites sont exigées aux extrémités amont et aval.

Pour l'écoulement supercritique, les conditions aux limites sont exigées seulement à l'extrémité amont.

Conditions Amont

Les conditions aux limites amont sont exigées à l'extrémité amont de tous les biefs non connectés à d'autres biefs ou à des zones de stockage. Une condition amont et appliquée comme un hydrogramme Q(t).

Condition Aval

Les conditions aux limites aval, sont exigées à l'extrémité aval de tous les biefs non connectés à d'autres biefs ou zones de stockage.

Quatre types de conditions aux limites aval peuvent être spécifiées :

- Limigramme H(t)
- Hydrogramme Q(t)
- Courbe de forage Q(H)
- Profondeur normale (à partir de l'équation de Manning)

3. Modèles hydrologiques (Cinématiques)

3.1. Introduction

La propagation des crues est une application directe des principes des écoulements transitoires à surface libre. Cependant, les crues, en milieux naturels de par leurs caractéristiques propres, ont certaines spécificités et par conséquent, des simplifications peuvent être effectuées et une prise en compte plus simplifiée peut être introduite.

En effet, dans une rivière, la montée et la descente d'une crue se passent beaucoup plus lentement que dans le cas d'écoulements transitoires dans les canaux artificiels (canaux d'irrigation, d'assainissement ou de centrales hydrauliques, etc.).

Une partie des termes d'accélération de l'équation dynamique peuvent être ou devenir négligeables.

$$Q = CA\sqrt{S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}},$$

Pour une rivière, les termes correspondants respectifs des pentes sont de l'ordre de :

4.0 0.08 0.02 0.0008 m/km

Une onde de crue s'allonge et s'amortit tout en progressant vers l'aval.

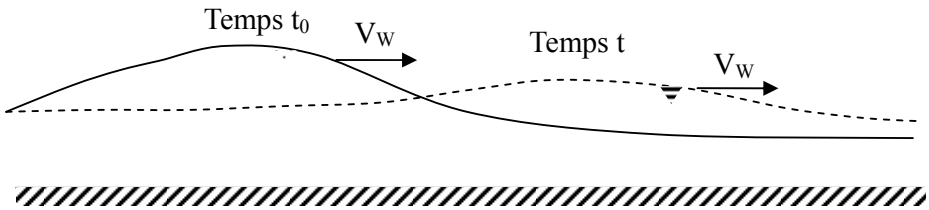

Figure.20. : Progression d'une onde

L'atténuation des crues est simulée par les termes d'accélération et de frottement de l'équation dynamique des modèles hydrauliques. Mais, elle peut être aussi modélisée par des mécanismes beaucoup plus simples, tels que le stockage dans des réservoirs traversés par la crue. Par ailleurs, les amortissements résultant des irrégularités des cours d'eau naturels peuvent être simulés par une partie de réservoirs. Cette approche est une application d'un principe plus général exprimé en termes électriques comme suit: "Un signal entrant un système peut être amorti par une capacité (réservoir) ou une résistance (frottement)".

Les modèles hydrauliques tiennent compte des effets de stockage (équation de continuité) et du frottement (équation dynamique). Cependant, si l'effet de l'accélération est négligeable, un modèle

mathématique ne tenant compte que du stockage sera beaucoup plus approprié à la simulation de ces conditions transitoires.

3.2. Mouvement d'une onde de crue dans une rivière

Soit une onde monoclinale se déplaçant vers l'aval d'une rivière, à la vitesse V_W, sans dispersion ni amortissement.

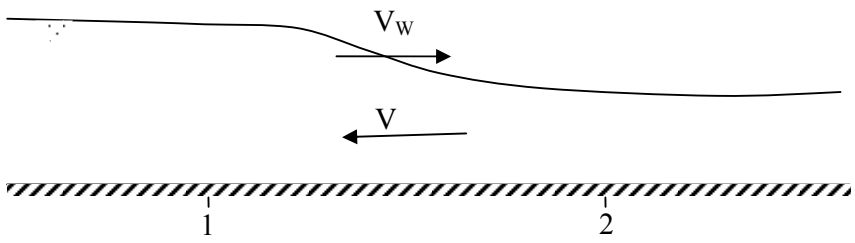

Figure 21. : Onde monoclinale

Si l'on suppose que l'écoulement est dirigé vers l'amont avec une vitesse $V = V_W$, l'onde sera stationnaire, et,

$(V - V_W)A =$ Constante le long de l'onde.

Soit :

$Q - V_W A =$ constante

Et

$dQ - V_W\, dA = 0$

D'où

$$V_w = \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{B}\frac{dQ}{dy} = \frac{1}{B}\frac{d(VA)}{dy}$$

$$= \frac{1}{B} V \frac{dA}{dy} + A\frac{dV}{dA} \qquad , \qquad dA = Bdy$$

$$V_W = V + A\,\frac{dV}{dA}$$

Cette expression de V_W parait en contradiction avec la théorie des caractéristiques des écoulements transitoires.

- Une onde positive devient de plus en plus raide en se déplaçant vers l'aval.
- La vitesse absolue de l'onde est donnée par ,

- $V_W = V \pm \sqrt{gD}$
- $\frac{dQ}{dy}$, étant une dérivée totale, elle n'est constante que si Q ne dépendait que de y, Q = f(y).

Malgré ces contradictions, les observations des crues dans les cours d'eau naturels ont toujours confirmé le fait que

$$V_W = \frac{dQ}{dA}$$

En particulier si B est très grand devant y (canal large), ou si la section est rectangulaire, la formule de Chezy donne :

$$Q = AV = A.R^{1/2} = B\ C\ S_0^{1/2}\ y^{3/2}$$

Et $$V_W = \frac{dQ}{dA} = \frac{3}{2} B\ C\ S_0^{1/2} y^{1/2} \frac{dy}{dA} = \frac{3}{2}\ C S_0^{1/2} y^{1/2}$$

$$V_W = \frac{3}{2} V$$

Si on applique la formule de Manning, on trouve $V_W = \frac{3}{3} V$

D'après ces observations le rapport $\frac{V_W}{V}$ est toujours supérieur à 1, et varie autour de 1.5.

3.3. Onde cinématique

Les observations précédentes qui semblent être en contradiction avec la théorie des écoulements transitoires, ne peuvent être expliquées qu'en admettant l'existence d'une autre forme de mouvement d'ondes, que celle des caractéristiques (dynamique). Une onde cinématique peut être définie en admettant que le débit ne dépend que de y. en d'autres termes, la pente $S_f = S_0$, et les autres pentes dans l'expression de S_f (section1.2) sont négligées.

$$Q = C\ A\ \sqrt{S_0}$$

L'existence d'une telle onde cinématique est confirmée par le réarrangement de l'équation de continuité.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dQ}{dy}\ \frac{\partial y}{\partial x} + B\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Ce qui est équivalent à poser

$$\frac{dx}{dt}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{dy}{dt}=0$$

Avec

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{B}\frac{dQ}{dy}$$

Ainsi, pour un observateur se déplaçant à la vitesse de l'onde cinématique,

$$V_W=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{B}\frac{dQ}{dy}=V+A\frac{dV}{dA}$$

y et Q paraîtront constantes. On rappelle que cette onde résulte de l'équation de continuité toute seule, d'où le nom d'onde cinématique, la distinguant des ondes dynamiques, résultant des équations de Saint Venant.

La vitesse de cette onde cinématique est la même que celle de l'onde monoclinale d'une rivière. Ainsi on peut conclure que la propagation des crues dans les cours d'eaux naturels est de nature cinématique, et que l'étude de ces crues s'adapte mieux aux modèles hydrologiques.

On rappelle aussi que, contrairement aux ondes dynamiques dont la vitesse de propagation est,

$$V_W=\frac{dx}{dt}=V\pm C$$

Une onde cinématique prend une seule valeur,

$$V_W=\frac{dx}{dt}=V+A\frac{dV}{dA}$$

Elle est toujours positive et par conséquent elle ne se déplace que vers l'aval. Le rapport $\frac{dV}{dA}$ étant toujours supérieur à 1, l'onde cinématique aura toujours de l'avance sur l'écoulement, $(V_W > V)$.

Dans un cours d'eau naturel, les deux types de propagation sont présents. Dans la plupart des cas, la pente S_0 est de loin la plus importante, et même si d'autres pentes, dans l'expression de S_f, ne sont pas négligeables, le mouvement d'une telle crue est principalement de nature cinématique

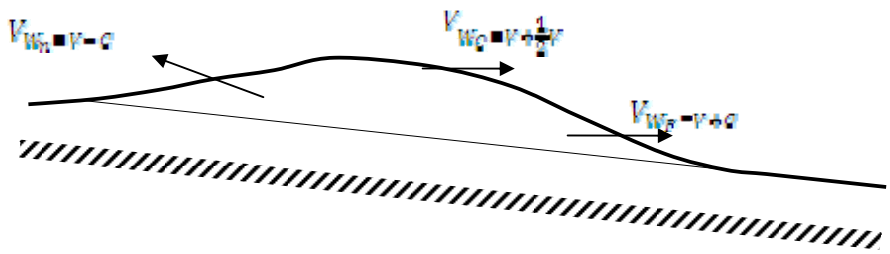

Figure 22. : Onde cinématique

Pour avoir $V_{W_p} > V_{W_c}$, il faut que C soir supérieur à V/2, soit

C > ½ V

Ou bien V/C < 2 , $F_r < 2$

Cette condition est vraie pour tous les cours d'eaux naturels, sauf les torrents des montagnes. Ainsi, l'onde dynamique a toujours de l'avance sur l'onde cinématique. De même, l'onde dynamique montante, est toujours en retard puisque $V_{W_n} < V < V_{W_c}$.

Mais pour $F_r < 2$, l'onde dynamique ne produit aucune déformation (surélévation de la surface de l'écoulement avant l'arrivée de l'onde cinématique ; cela est dû à l'importance des amortissements à nombre de Froude faible. Ces déformations ne sont appréciables que pour des $F_r > 2$, mais dans ce cas, on aura

$V_{W_c} > V_{W_p}$

L'onde cinématique va vite rattraper le front de l'onde dynamique qui sera de plus en plus raide.

En conclusion, dans les écoulements naturels, un modèle hydrologique (cinématique) est dans la plupart des cas suffisant pour l'analyse des conditions transitoires.

4. Modèle de Muskingum

Ce modèle a été développé aux Etats Unis par l'US Corps of Engineers, pour l'étude des crues de la rivière Muskingum à Ohio.

Pour un tronçon de rivière, l'équation peut s'écrire

$$I - Q = \frac{dS}{dt}$$

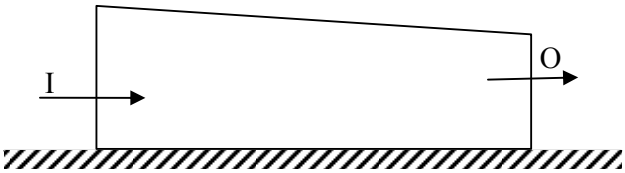

Figure 23. : Schéma de Muskingum

Avec

I : débit d'entrée

O : débit de sortie

$\frac{dS}{dt}$:Variation du volume stocké.

Le modèle de Muskingum est basé sur la relation suivante entre I, O et S.

K : temps de propagation d'onde :$\frac{V_W}{L}$

x : Facteur de pondération, lié à l'amortissement de la pointe de l'hydrogramme ; $(0 \leq x \leq 1/2)$.

Ces deux coefficients sont variables avec le débit, mais souvent, ils sont calculés (ajustés) à partir d'observations des hydrogrammes d'entrée et de sortie I(t) et O(t) respectivement. Pour une rivière, en l'absence de telles observations, on prend k = temps de concentration, et x = 0.2.

L'équation 2 peut être réarrangée sous la forme

$$S = K[x(I - O) + O]$$

5. Références bibliographiques

Aspects Hydrologiques, hydrauliques, logiciels

Vieux, B.E., 2004. Distributed Hydrologic Modeling using GIS. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Davie, T., 2008. Fundamentals of Hydrology, Second edition, Routledge, Taylor & Francis Group, 200p.

Ambroise, B., 1991. Hydrologie des petits bassins versants ruraux en milieu tempéré, processus et modèles. Séminaire du Conseil Scientifique du département « Science du Sol » de l'Institut National de Recherches Agronomiques de Dijon, 26-27 mars 1991.

Ambroise, B., 1999. La dynamique du cycle de l'eau dans un bassin versant. Processus, Facteurs,

Modèles. Editions H.G.A., Bucarest.

Hydrologic Engineering Center. 2003. Geospatial Hydrologic Modeling Extension HEC- GeoHMS User's Manual Version 1.1. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Hydrologic Engineering Center. 2006. GageInterp A Program for Creating a Sequence of

HEC-DSS Grids from Time-Series Measurements Version 1.4. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Hydrologic Engineering Center. 2006. HEC Data Storage System Visual Utility Engine (DSSVue) User's Manual Version 1.2. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Hydrologic Engineering Center. 2008. Hydrologic Modeling System HEC-HMS User's Manual Version 3.2. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Panigrahi, B.K., Harris, D.J., and C.S. Pathak, 2012. Hydrology and Hydraulics: Watershed Management and Flood Assessment, Short Course offered during 5th International Perspective on Water Resources & the Environment January 4-7, 2012, Marrakech, Morocco

Beven, K.J., 2002. Rainfall-Runoff Modelling The Primer, John Wiley & Sons Ltd, 359 p.

Singh V.P., 1995. Watershed modeling. In: Singh V.P., ed. Computer models of watershed
Davie, T. (2008) : FUNDAMENTALS OF HYDROLOGY, Second edition

Routledge Fundamentals of Physical Geography, Routledge Taylor and francis Group

Vieux, B.E., 2004. Distributed Hydrologic Modeling using GIS. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Singh, V.P. and Frevert, D.K., editors, 2002a. Mathematical Models of Large Watershed Hydrology. Water Resources Publications, Highlands Ranch, CO.

William A. Scharffenberg and Matthew J. Fleming (2010) : Hydrologic Modeling System HEC-HMS, User's Manual, Version 3.5 August 2010, US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center

Ancey, C. (2012) : Notes de cours Hydraulique à surface libre, version 4.2 du 2 mai 2012, Laboratoire hydraulique environnementale (LHE), École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Chow, V.T., 1959, Open-Channel Hydraulics , McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y.

French, R. H., 1985, Open-Channel Hydraulics , McGraw-Hill Book Co., New York, NY.

Henderson, F.M., 1966, Open-Channel Flow , Macmillan Co., London, UK.

Abbott, M. B., 1979, Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free Surface Flows, Pitman, London.

Abbott, M. B., and Basco, D. R., 1990, Computational Fluid Dynamics, John Wiley, New York, NY.

Basco, D. R., 1983, Computation of Rapidly Varied, Unsteady Free-Surface Flow, U. S. Geological Survey Report WRI 83-4284.

Bell, S. W., Elliot, R. C., and Chaudhry, M. H., 1992, "Experimental results of two-dimensional dam-break flows," Jour. Hyd. Research, vol. 30, no. 2, pp.225-252.

Boussinesq, J., 1877, "Essais sur la theorie des eaux courantes," Memoires pre- sertes par divers Savants a l'Academie des Sciences de l'Institut de France, vol. 23, pp. 1-680; vol. 24, 1-64.

Chow, V. T., 1959, Open-Channel Hydraulics, McGraw-Hill, New York, NY. Cunge, J. A., Holly, F. M., and Verwey, A., 1980, Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Pitman, London.

DHI. MIKE 21 Flow Model: Hydrodynamic Module Scientific Documentation. MIKE by DHI, 2009.

Guide de laboratoire HEC-RAS (2009): Exemple pour la rivière du Loup, HEC-RAS Version 3.1.3, CTN-762 Ressources hydriques, Ecole supérieure de Technologie, Montréal,

Gary W. Brunner (2010) ; HEC-RAS River Analysis System, Hydraulic Reference Manual, Version 4.1, January 2010 Approved for Public Release. US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center

Ouazar, D. (2006) : Ecoulements en régime permanent et transitoire, Notes de cours, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat.

Ouazar, D. (2010) : Modèles numériques pour l'ingénieur, Notes de cours, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat

Ouazar, D. (2001) : Modélisation des problèmes d'hydrologie et d'hydraulique, Notes de cours, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat

Manuel d'utilisation du logiciel WMS, Aquaveo

Projets de fin d'études :

Bennajah, A., et E. Messka, 2011. Modélisation de Prévision des crues par utilisation de la Plateforme WMS, Cas d'étude Bassin de l'Ouergha, Mémoire de Projet de Fin d'Etudes, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V Agdal, Rabat

AIT ZEOUAY, H. 2011. Modélisation de prévision des crues par utilisation de la plateforme ATHYS, Cas d'étude Bassin de l'Ouergha, Mémoire de Projet de Fin d"Etudes, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V Agdal, Rabat

ESSADAOUI, M., 2012). Modélisation de Prévision des crues par utilisation de la Plateforme WMS, Cas d'étude Bassin de l'Ouergha, Mémoire de Projet de Fin d"Etudes, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V Agdal, Rabat

Sites internet

http://www.aquaveo.com/wms-intro

http://www.xmswiki.com/xms/WMS:Quick_Tour_-_Layout

http://www.xpsoftware.com/products/watershed-modeling-system-wms/

http://srtm.csi.cgiar.org