USAID
FROM THE AMERICAN PEOPLE

COMPÉTITIVITÉ ÉCONOMIQUE DU MAROC

CONCEPTS DE BASE DE LA MODELISATION HYDROLOGIQUE ET HYDRAULIQUE

APPORTS ET PRINCIPES D'UTILISATION DES OUTILS HEC, HEC-HMS ET HEC-RAS, PLATEFORME D'INTEGRATION WMS ET OUTIL RIBASIM

FASCICULE 3 : MODELISATION EN HYDRAULIQUE DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE – ECOULEMENTS EN REGIME PERMANENT

DATE : JUIN 2013 **MEC DOCUMENT 139fr**

Ce document a été préparé par DAI pour évaluation par l'Agence des États-Unis pour le développement international (USAID).

COMPÉTITIVITÉ ÉCONOMIQUE DU MAROC

CONCEPTS DE BASE DE LA MODELISATION HYDROLOGIQUE ET HYDRAULIQUE

APPORTS ET PRINCIPES D'UTILISATION DES OUTILS HEC, HEC-HMS ET HEC-RAS, PLATEFORME D'INTEGRATION WMS ET OUTIL RIBASIM

FASCICULE 3 : MODELISATION EN HYDRAULIQUE DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE –ECOULEMENTS EN REGIME PERMANENT

Soumis à USAID/Maroc, Bureau de croissance économique - Objectif d'aide n° 3 : Réduction des barrières au commerce et à l'investissement

Par DAI

Numéro de contrat : EEM-I-00-07-00009-00 : Ordre de mission : EEM-I-07-07-00009

L'opinion de l'auteur de ce document engage uniquement la responsabilité de ce dernier et ne reflète pas nécessairement le point de vue de l'Agence des États-Unis pour le développement international (USAID) ni celui du Gouvernement des États-Unis

Programme Compétitivité Economique du Maroc

8, rue du Rif

Souissi

10 000 Rabat

Maroc

Tel: (212) 05 37 63 05 59

Fax: (212) 05 37 63 05 61

andrew_watson@dai.com

Http://www.mecprogram.ma

TABLE DES MATIERES

Préambule : 1

Ecoulements en régime permanent 1

1. Introduction : Les différents régimes d'écoulement à surface libre 1
2. Ecoulements uniformes 2
3. Formules de l'écoulement uniforme 3
4. Ecoulements graduellement variés 7
5. Caractéristiques et classification des E.G.V. 12
6. Simulation numérique des E.G.V. 14
7. Courbes de remous en cours d'eau naturel 18
8. Ressaut hydraulique 19
9. Etude de quelques exemples numériques 24
10. Références bibliographiques 25

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : Ecoulement uniforme 2
Figure 2 : Energie Spécifique Q Constant 3
Figure 3 : Courbe de Débit Hs Constant 4
Figure 4. : Définitions canal type 4
Figure 5. : Classification des Régimes d'écoulement 5
Figure 6. : Canal rectangulaire 5
Figure 7. : Schéma de calcul (Energie) 7
Figure 8. : Schéma de calcul (Quantité de mouvement) 8
Figure 9. : Nature d'écoulements (GV, RV,etc.) 13
Figure 10. : Exemples d'Ecoulements 14
Figure 11. : Ressaut Hydraulique 19
Figure 12. : Ressaut hydraulique (calcul) 20
Figure 13. : Ressaut hydraulique (y_1, y_2) 21
Figure 14. : Classification des Régimes d'écoulement 22
Figure 15. : Longueur et Position du Ressaut 22

PREAMBULE

ECOULEMENTS EN RÉGIME PERMANENT

1. Introduction : Les différents régimes d'écoulement à surface libre

Les écoulements à surface libre comprennent tous les écoulements qui ne sont pas en charge. Cela englobe toutes les eaux de surface en zones urbaines et rurales, les cours d'eau naturels allant des très petits ruisseaux aux cours d'eau de premier ordre (fleuves et rivières), ainsi que tous les écoulements en conduites fermées non pleines (réseaux d'assainissement, tunnels, conduites, etc.).

Les régimes des écoulements à surface libre sont classés selon la variation des caractéristiques hydrauliques, telles que la vitesse et le tirant d'eau, ainsi que dans le temps et dans l'espace. Par rapport aux variations dans le temps on distingue les régimes permanents et non permanents). Par rapport aux variations dans l'espace, on distingue les régimes uniformes et non uniformes ou variés.

D'autres classifications tiennent compte des rapports des forces influençant les écoulements. En particulier, le rapport des forces d'inertie et de turbulence aux forces de viscosité est représenté par le Nombre de Reynolds. Suivant la valeur de ce nombre, le régime est laminaire, turbulent ou transitoire. Le rapport des forces d'inertie aux forces de la pesanteur est représenté par Nombre de Froude, qui permet la distinction entre les régimes fluvial, critique et torrentiel.

Dans un canal dont la pente, la section, la rugosité et le débit sont constants, c'est toujours le régime uniforme qui finit par s'établir ; d'où l'intérêt de l'étude de celui-ci. Les pertes par frottement dans ce régime sont entièrement compensées par la pente du fond. La présence d'une singularité dans la section (rétrécissement, élargissement, discontinuité du seuil...) provoque non seulement une perte localisée d'énergie, comme dans les écoulements en charge, mais aussi une modification de la surface libre.

Le régime est alors différent du régime uniforme qu'on appelle : ***Régime varié***

On peut diviser les écoulements variés en 2 groupes :

- Les écoulements **graduellement variés**, dont les caractéristiques hydrauliques et géométriques ne changent que très lentement d'une section à l'autre ;
- Les écoulements **rapidement variés** où l'on constate une évolution rapide, parfois discontinue des caractéristiques du mouvement.

Il ne faut pas confondre écoulement varié et écoulement non permanent :

- Le régime varié est un régime permanent qui n'est plus uniforme, c'est-à-dire les caractéristiques de l'écoulement varient d'une section à l'autre.
- Le régime non permanent (ou transitoire) est un régime dans lequel les caractéristiques du mouvement dans une section donnée sont fonction du temps.

On traitera d'abord le régime permanent dans les canaux et rivières naturelles. Les canaux prismatiques jouent un rôle très important dans la pratique, notamment dans les systèmes d'irrigation, les canaux artificiels et dans les systèmes d'égouts, et...

Notons par ailleurs que l'étude des écoulements à surface libre est beaucoup plus difficile que celle des conduites sous-pression, en effet, la ligne piézométrique qui n'est autre que la surface libre qui est même inconnue.

Pour les systèmes naturels, la section d'écoulement est variable, ainsi que la rugosité.

Comme on le verra plus loin, la surface libre s'obtient par intégration d'une équation différentielle dy/dx = f (x, y), laquelle nécessite un outil numérique informatique assez rapide à cause de la complexité du second membre non linéaire de l'équation différentielle.

2. Ecoulements uniformes

2.1. Définitions

Un écoulement est dit uniforme lorsqu'en tout point les caractéristiques géométriques et hydrauliques de la section restent constantes (fig. II.1).

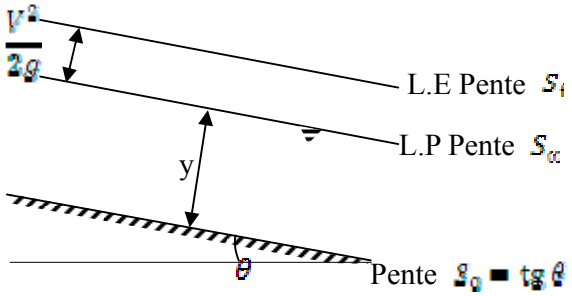

Figure 1 : Ecoulement uniforme

L.E : Ligne d'énergie

L.P : Surface libre = ligne piézométrique

NOTATIONS ET UNITES

A	:	Section d'écoulement	(m^2)
y	:	Profondeur d'écoulement	(m)
V	:	Vitesse d'écoulement	(m/s)
P	:	Périmètre mouillé	(m)
RH	:	Rayon hydraulique	RH = A/P (m)

Q	:	Débit	(m^3/s)
S_0	:	Pente du fond du lit	
S_f	:	Pente de frottement (définie plus tard)	
S_W	:	Pente piézométrique	
θ	:	pente du fond du lit de la rivière	

Ecoulement uniforme : $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$$S_0 = S_f = S_w$$

3. Formules de l'écoulement uniforme

a. Charge spécifique :

En régime uniforme, les pertes de charge sont exactement compensées par la pente du canal.

On définit la charge spécifique, (ou énergie spécifique) de l'écoulement par rapport au fond du canal par :

$$E = y + \alpha \frac{v^2}{2g}$$

α : facteur de correction d'énergie cinétique tenant compte de la non uniformité du profil des vitesses.

b. Ecoulement subcritique, critique et supercritique :

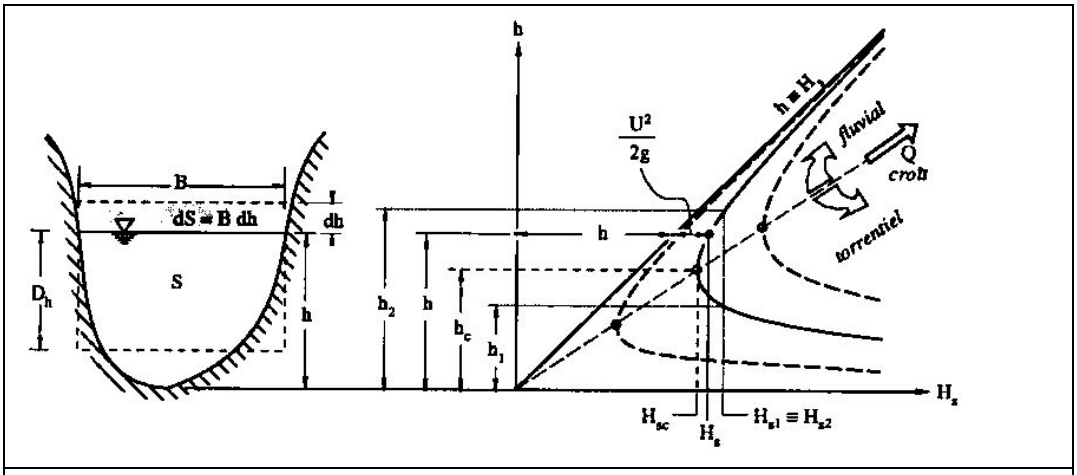

Figure 2 : Energie Spécifique Q Constant

E

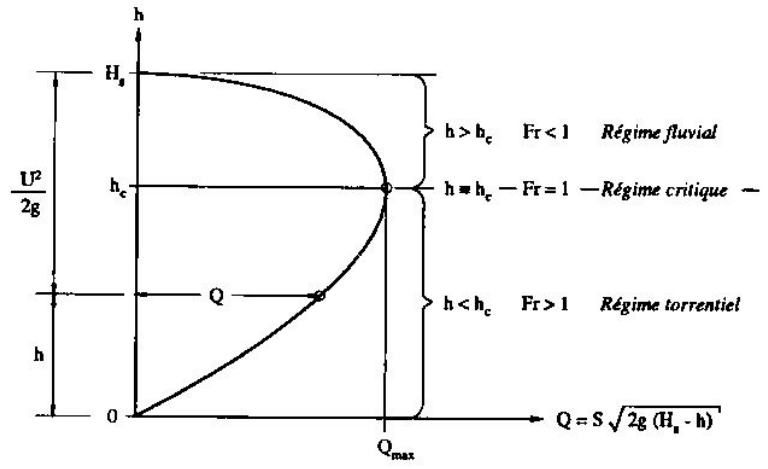

Figure 3 : Courbe de Débit Hs Constant

Le minimum d'énergie spécifique se présente à la profondeur hydraulique critique.

Analytiquement **:**

La profondeur critique, notée y_c s'obtient en écrivant :

$$Fr^2 = \frac{v^2}{gD} = 1$$

où D est la profondeur hydraulique :

Figure 4. : Définitions canal type

$$d = \frac{A}{B}$$

B : largeur du miroir.

A : section d'écoulement

La portion AC représente l'écoulement supercritique

La portion AB représente <u>l'écoulement subcritique</u>

La figure 5 illustre les quatre régimes d'écoulement pour des canaux rectangulaires très larges d'après les expériences de Robertson et Rouse.

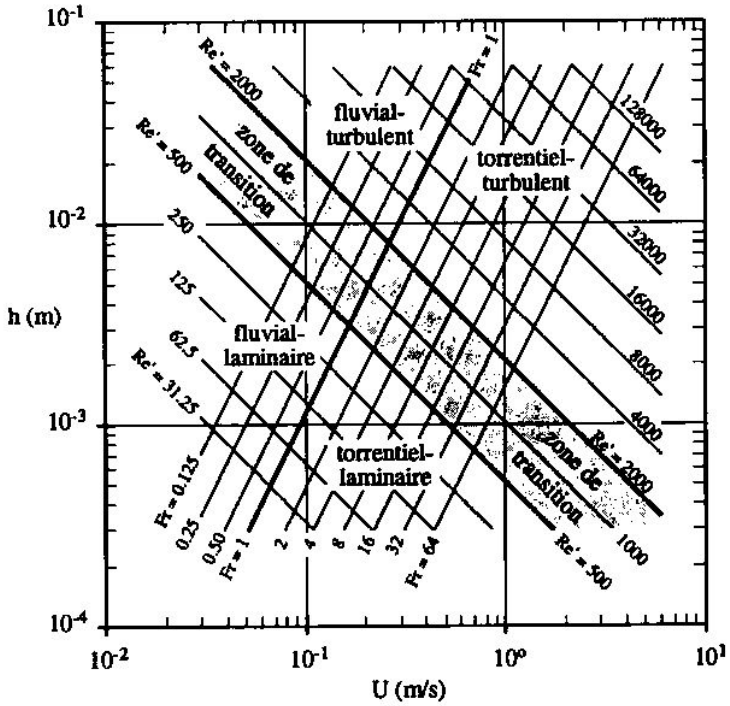

Figure 5. : Classification des Régimes d'écoulement

Canal rectangulaire

b : largeur du calcul

Posons $q = \frac{Q}{b}$, *débit/unité de largeur*

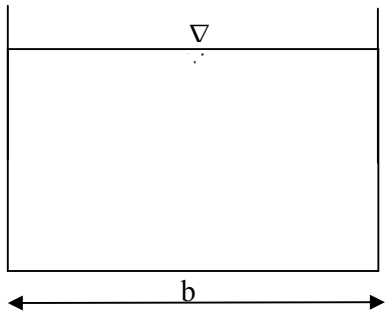

Figure 6. : Canal rectangulaire

$$D = \frac{A}{b} = \frac{by}{b} = y \quad ; \qquad V = \frac{Q}{A} = \frac{q}{b \cdot y} = \frac{q}{y}$$

d'où

$$\boxed{y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}}$$

Canal non rectangulaire

Pour les canaux non rectangulaires, et pour un débit et une forme du canal donnés, la profondeur critique peut être obtenue par approximations successives de l'équation :

$$F_r^2 = \frac{y^2}{gD} = 1$$

3.1. Equation de Manning

L'équation de Manning s'écrit :

$$A = \frac{1}{n} A R_H^{2/3} \sqrt{S_0}$$

où n est le coefficient de rugosité représentant le frottement de Manning

$$R_H = \frac{A}{P} \; : \; rayon\ hydraulique$$

S_o : pente du canal

Pour une forme donnée du canal, un débit Q, une pente S_o et un coefficient de Manning donnés, l'équation permet de calculer soit explicitement, soit par approximations successives, la profondeur normale $\mathbf{y_n}$ de l'écoulement.

On traitera dans un paragraphe ultérieur, quelques méthodes numériques de résolution d'une telle équation après l'avoir écrite sous la forme f(y) = 0.

3.2. Formule de Chezy

Le modèle mathématique le plus simple est celui de Chezy.

$$Q = A \cdot V = \cdot C \cdot \sqrt{R \cdot S_f}$$

avec

A : section mouillée

C : Coefficient de Chézy

R : Rayon hydraulique

S_f : Pente de frottement

4. Ecoulements graduellement variés

4.1. Définition

Un écoulement graduellement varié (E.G.V) est un écoulement dans lequel la section d'écoulement, la surface libre et la vitesse varient de manière progressive suivant la dimension longitudinale.

Les hypothèses de base admises pour le développement sont :

- la pente du canal varie lentement,
- la profondeur y de l'écoulement varie lentement,
- la section de l'écoulement varie lentement,
- la pression a une distribution hydrostatique,
- l'écoulement est unidimensionnel,
- l'équation de Manning du régime uniforme est valable en E.G.V en remplaçant S_o par S_f.,
- le coefficient de Manning n est constant et ne dépend pas de la profondeur.

4.2. Equation générale de la courbe de remous

Les écoulements graduellement variés se produisent parfois sur des distances importantes et conduisent aux formes de la surface libre appelées : courbes de remous ou axes hydrauliques.

Les équations fondamentales pour l'étude de ces écoulements sont : équation de continuité, équation de conservation de la quantité de mouvement, et le théorème de Bernoulli associé aux équations de pertes d'énergie.

Considérons dans un canal, 2 sections d'abscisses x et x + dx comme le montre la figure ci-dessous.

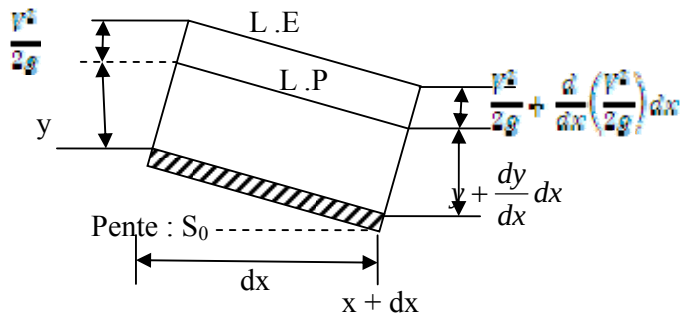

Figure 7. : Schéma de calcul (Energie)

L.E : Ligne d'énergie

L.P : Surface libre

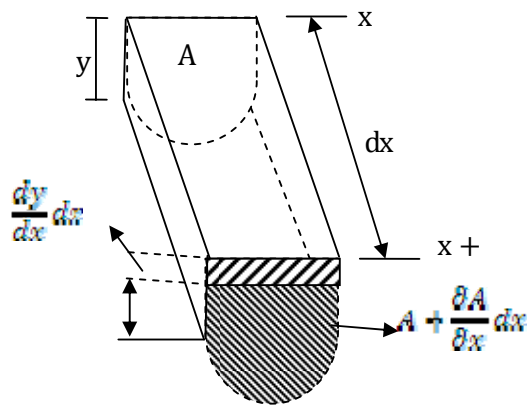

Figure 8. : Schéma de calcul (Quantité de mouvement)

Forces de pression : Fp

$$\text{à la section } x : F_p\big|_x = \rho g z_G A$$

$$\text{à la section } x + dx : F_p\big|_{x+dx} = \rho g (z_G + dy) A$$

où z_G est la profondeur du centre de gravité du volume de contrôle, compté à partir de la surface libre.

$$\Rightarrow \quad F_p\big|_x - F_p\big|_{x+dx} = -\rho g A dy$$

On peut maintenant écrire la conservation de la quantité du mouvement comme suit :

$$\rho\, g\, S_0\, A\, dx - \rho\, g\, A\, dy - \rho\, g\, S_f\, A\, dx = \rho[Q dv + (v + dv)\, dQ]$$

En négligeant les termes de second ordre :

$$\Rightarrow \rho\, g\, dx\, (S_0 - S_0) - \rho\, g\, a\, \frac{dy}{dx} dx = \frac{d}{dx}(\rho Q v) dx$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\rho\, \frac{Q^2}{A}\right) dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{Q^2}{A}\right)\frac{dQ}{dx} + \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{Q^2}{A}\right)\frac{dA}{dx}$$

$$= \frac{2Q}{A}\frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2}\frac{dA}{dx}$$

$$= \frac{2Q}{A}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) - \frac{Q^2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)$$

Or $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial A}{\partial y} = B$

D'où $gA(S_0 - S_f) - gA\frac{dy}{dx} = \frac{2Q}{A}\frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q^2 B}{A^2}\frac{dy}{dx}$

Où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{2Q}{g\,A^2}\frac{dQ}{dx} + \frac{Q^2}{gQ^2}\frac{\partial A}{\partial x}}{1 - \frac{Q^2 B}{g\,A^2}}$$

Telle est l'équation différentielle qui gouverne le calcul de la courbe de remous dans un canal de forme quelconque avec des apports latéraux.

Notations

☐	:	densité de l'eau	S_o :	pente du lit	
y	:	profondeur de l'eau	S_f :	pente de la L.E	
A	:	section d'écoulement			
B	:	largeur du miroir			
Q	:	débit			
V	:	vitesse			

Conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{Bmatrix}\text{Composante}\\ \text{du poids}\\ \text{parallèle au lit}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{Différence}\\ \text{des forces}\\ \text{de pression}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{Forces}\\ \text{de}\\ \text{frottement}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{Variation de la quantité}\\ \text{de mouvement par}\\ \text{unité de temps}\end{Bmatrix}$$

à la section x, la quantité de mouvement vaut ☐ QV

à la section x + dx, la quantité de mouvement vaut ☐ (Q + d Q) (V + d V)

Variation de la quantité de mouvement =

☐ (Q + d Q) (V + d V) - ☐QV = ☐ [Q d V + (V + d V) d Q]

Force de gravité parallèle au lit :

$$= \rho g S_0 \left(A + \frac{dA}{2}\right) dx$$

$$\left(\text{On néglige } \rho g S_0 \frac{dA\,dx}{2}\right) \simeq \rho g S_0 A\,dx$$

Forces de frottement : F_f

Compte tenu des hypothèses faites au § III.2, on admet que dans un tronçon assez court du canal, la valeur de S_f est égale à celle qui correspondrait à un régime uniforme où le même débit s'écoulerait

sous le tirant d'eau de la section moyenne du tronçon.

$$\rightarrow F_f = \rho\, g\, Q\, s_f\, dx$$

Cas d'un canal avec pertes latérales

L'énergie totale dans une section est :

$$H = y + z + \frac{Q^2}{2gA^2}$$ z : côte du radier

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{2Q}{A^2}\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{2g}\frac{2Q^2}{A^3}\frac{dA}{dx}$$

Or $$\frac{dH}{dx} = -S_f$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\frac{dz}{dx} = -S_0$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{Q}{gA^2}\frac{dQ}{dx} + \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial Q}{\partial x}}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}}$$

En définitive, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - c \cdot \frac{Q}{gA^2}\frac{dQ}{dx} + \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial Q}{\partial x}}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}}$$

avec

$$\begin{cases} c = 1 & s'il\ y\ a\ des\ pertes\ latérales \\ c = 2 & s'il\ y\ a\ des\ apports\ latéraux \end{cases}$$

4.3. Quelques cas particuliers

(i) *Canal prismatique avec échanges latéraux*

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - c\frac{Q^2}{gA^2}\frac{dQ}{dx}}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}}$$

(ii) *Canal quelconque sans échanges latéraux*

$$\frac{dQ}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f + \frac{Q^2}{gA^2}\frac{\partial A}{\partial x}}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}}$$

(iii) *Canal prismatique sans échanges latéraux*

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dQ}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}}$$

4.4. Remarque : Méthode énergétique

Cette dernière équation peut être obtenue directement par application de la conservation d'énergie.

En effet : entre 2 stations x et x + dx, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$y + S_0 dx + \frac{v^2}{2g} = (y + dy) + S_f dx + \frac{v^2}{2g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right)$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = s_0 - sS_f$$

or

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v}{g}\frac{dv}{dx}$$

d'autre part Q = Av = cte(continuité)

$$A\frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dA}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow A\frac{dv}{dx} = -v \cdot \frac{dA}{dx}$$

$$= -v\,B\frac{dy}{dx} = \cdot\ (dA = B\,dy)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{v}{g} \cdot \frac{vB}{A}\frac{dy}{dx} = -\frac{v^2 B}{gA}\frac{dy}{dx}$$

$$= -\frac{Q^2 B}{gA^3}\frac{dy}{dx}$$

Substituant dans :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{Q^2 B}{gA^3}\frac{dyB}{dx} = s_0 - sS_f$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s_0 - s_f}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}}$$

Cette équation, bien que restrictive, est très utilisée dans la pratique où en général on traite les écoulements graduellement variés dans les canaux prismatiques ($\partial A/\partial x = 0$) sans apports latéraux, ni pertes latérales.

Par souci de simplicité et sans restreindre la généralité, cette équation fera l'objet d'une étude détaillée quant aux méthodes de résolution.

Calcul de S_f :

Dans les hypothèses admises, on a supposé que la formule de Manning est valable en régime graduellement varié en remplaçant S_o par S_f

Il vient

$$Q = \frac{1}{n} A R_H^{2/3} S_f^{1/2}$$

d'où

$$S_f = \left(n^2 Q^2 P^{4/3}\right)/A^{10/3}$$

et l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}}$ devient après substitution :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - \left(n^2 Q^2 P^{4/3}\right)/A^{10/3}}{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}}$$

5. Caractéristiques et classification des E.G.V.

L'équation ci-dessus apparaît comme le rapport de 2 quantités :

$$F_1 = S_o - \left(n^2 Q^2 P^{4/3}\right)/A^{10/3}$$
$$F_2 = 1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}$$

Etude qualitative :

Le signe de dy/dx dépend de celui de F_1 et F_2.

Examinons les quantités F_1 et F_2 dans le cas d'un canal rectangulaire large :

Interprétation et classification :

Dans l'équation ci-dessus, il est clair que le signe de dy/dx dépend de la position relative de la profondeur actuelle y par rapport à celle de la profondeur normale et de la profondeur critique, ainsi que du signe de S_o .

Par conséquent, il est tout à fait naturel que la nature de la pente et la position de y par rapport à yn et yc soient des facteurs déterminants pour la classification des E.G.V.

Ainsi les courbes de remous (axes hydrauliques) sont classifiées de cette manière par une lettre et un nombre :

- la lettre se réfère à la nature de la pente du fond.
- le nombre se réfère à la position de y par rapport yn et yc .

La pente du fond peut être du type suivant :

Lettre	Nature de la pente	Région
M	Pente douce (Mild)	yn > yc
C	Pente critique (Critical)	yn = yc
S	Pente raide (Steep)	yn < yc
H	Horizontale (Horizontal)	So = 0
A	Défavorable (Adverse)	So < 0

☐ le nombre peut être 1 ou 2 ou 3

1 : La surface libre est au-dessus de la profondeur yn et yc

2 : la surface libre est située entre yn et yc

3 : La surface libre est située au-dessous de yn et yc

On est en présence de 5 catégories de pentes et 3 types de position de la surface libre.

d'où 15 combinaisons possibles (figure 9).

Or, pour un écoulement uniforme, la pente horizontale et défavorable est impossible, ce qui permet d'éliminer H1 et A1.

D'autre part, pour la pente critique, yn coincide avec yc éliminant ainsi le profil C2.

Il reste donc 12 types de profils de la surface libre comme illustré sur la figure 10.

Ces variations possibles de la surface libre correspondant aux différents types de profils sont résumées dans le tableau de classification ci-dessous.

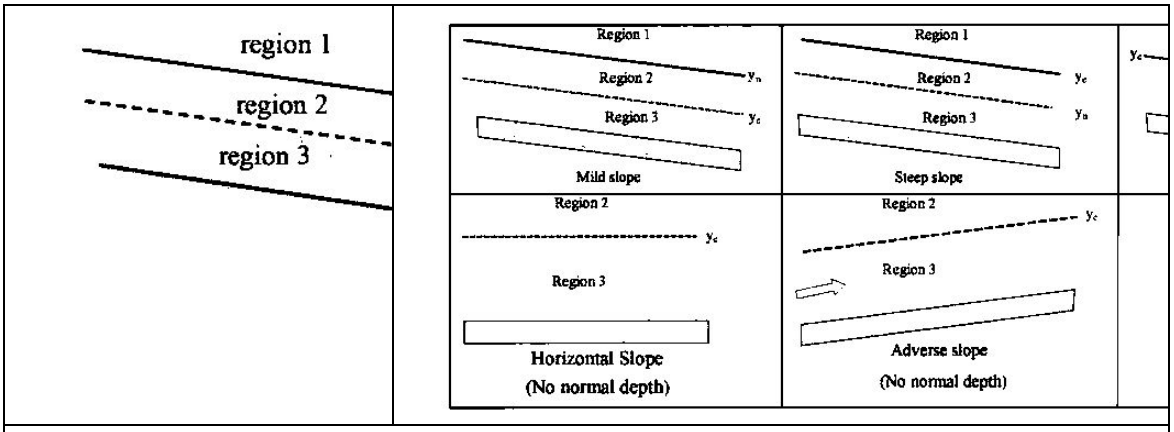

Figure 9. : Nature d'écoulements (GV, RV,etc.)

Quelques exemples d'écoulements sont illustrés dans la figure X :

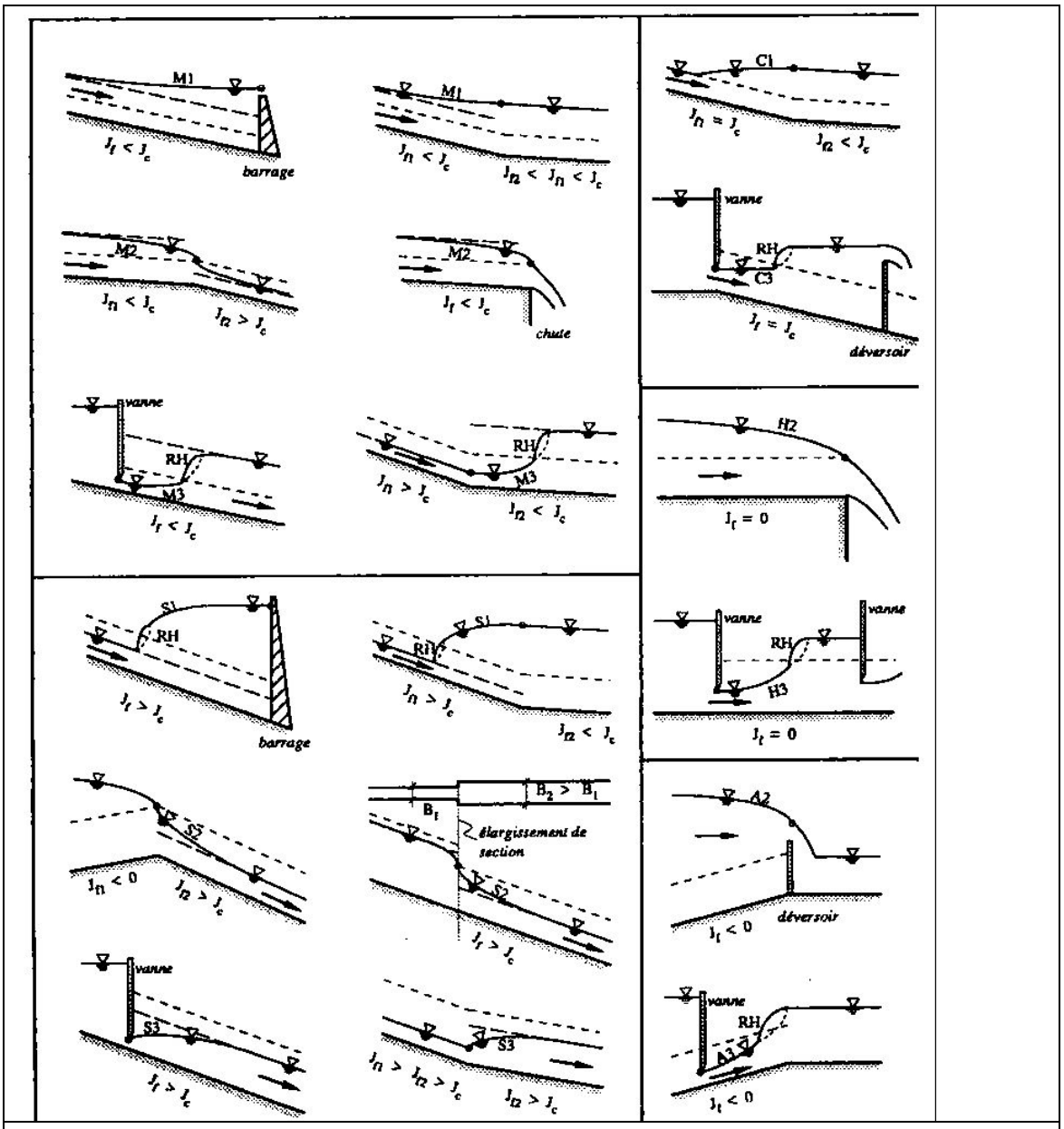

Figure 10. : Exemples d'Ecoulements

6. Simulation numérique des E.G.V.

6.1. Techniques de résolution

L'équation différentielle ordinaire à résoudre s'écrit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F_r^2} = f(x, y)$$

Où f (x, y) est une fonction qui dépend explicitement de x et y en général.

L'intégration de cette équation est un problème d'équation différentielle ordinaire avec la donnée de conditions qui traduisent la connaissance de la surface libre à certaines sections spécifiques.

Plusieurs techniques de résolution peuvent être appliquées pour l'intégration de cette équation, parmi lesquelles on peut citer :

- Intégration graphique
- Intégration analytique ou directe
- Méthodes numériques

Uniquement, les méthodes numériques feront l'objet d'une étude détaillée, en particulier :

- Méthodes pas à pas (variable et constant)
- Méthodes purement numériques

a. Méthodes purement numériques

A l'exception des zones d'instabilité, on peut utiliser des schémas numériques simples.

a1. Schéma d'Euler

Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y)$$

en supposant que f ne varie pas dans $[x_k, x_{k+1}]$

$$\rightarrow dy = f(x, y)dx$$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} dy = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx$$

le terme $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\, dx$ peut être approximé par : $f(x_k, y_k)\, \Delta x$ en supposant que f ne varie pas dans $[x_k, x_{k+1}]$

d'où

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\Delta x$$

Ce schéma permet de connaître la solution à la station x_{k+1} à partir de celle de la station x_k.

Il utilise donc l'information au début de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$: le calcul se fait donc de l'amont vers l'aval.

L'erreur d'approximation est appréciable dans le schéma d'Euler ; par conséquent, il n'est pas recommandé car non précis et instable.

a2. Schéma trapézoïdal

Il utilise l'approximation :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)\,dx = \frac{1}{2}\left[f(x_k,y_k) + f(x_{k+1},y_{k+1})\right]\Delta x$$

d'où

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left\{f(x_k,y_k) + f(x_{k+1},y_{k+1})\right\}\Delta x$$

Procédure détaillée de résolution

i) Calculer $f(x_k, y_k)$ $(x_k, y_k$ *étant connus au début*$)$

ii) $f(x_{k+1}, y_{k+1}) \leftarrow f(x_k, y_k)$

iii) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]\Delta x$

iv) Calculer une nouvelle valeur de y_{k+1} en utilisant $f(x_{k+1}, y_{k+1})$ calculé en (iii).

v) Calculer $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]\Delta x$ en utilisant la valeur de $f(x_{k+1}, y_{k+1})$

vi) Tester si $\left|y_{k+1,calculé} - y_{k+1,donné}\right| \leq précision$

Sinon $\rightarrow$ répéter la procédure pour un autre point.

a**3. Méthodes des tangentes : (Runge - Kutta)**

- Runge - Kutta d'ordre 2

$$k_1 = h \cdot f(x_k, y_k) \qquad h = \Delta x = x_{k+1} - x_k$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2}h,\ y_k + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right)$$

☐ Runge - Kutta d'ordre 4

$$k_1 = h \cdot f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right) \qquad h = x_{k+1} - x_k$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_3)$$

a4. **Méthodes pas à pas (procédure utilisée dans HEC 2**

La procédure de cette méthode se base sur l'équilibrage de l'équation d'énergie entre deux stations

successives où les caractéristiques hydrauliques sont connues.

Cette équation, écrite entre 2 stations (1) et (2), est :

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + y_{21} + \alpha_{21} \frac{v_{21}^2}{2g} + h_f$$

z_i : élévation de la station i

y_i : profondeur à la station i

v_i : vitesse à la station i

h_f : perte d'énergie entre 1 et 2

h_f peut être approximée de plusieurs façons à partir de $(h_f)_i$ et $(h_f)_{i+1}$, en particulier, ceci revient à estimer la pente de la ligne d'énergie moyenne entre les stations (1) et (2) :

- Moyenne arithmétique

$$S_f = \frac{S_{f_1} + S_{f_2}}{2}$$

- Moyenne géométrique

$$S_f = \sqrt{S_{f_1} \cdot S_{f_2}}$$

- Moyenne harmonique

$$S_f = \frac{2\, S_{f_1} + S_{f_2}}{S_{f_1} + S_{f_2}}$$

$\hat{S}_f$ est donc un estimateur de la pente réelle Sf entre la stations 1 et 2

d'où $h_f = \hat{S}_f \Delta x$ est la perte d'énergie réelle entre (1) et (2), l'équation d'énergie devient :

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + S_f \Delta x$$

Posons

$$H_i = z_i + y_i + \alpha_i \frac{v_i^2}{2g} \qquad i = 1, 2$$

et donc : $H_1 = H_2 + S_f \Delta x$

Procédure : (suppose que l'on connait les caractéristiques initiales)

i) Se donner y_2 et calculer $H_2^{(1)} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g}$

ii) Estimer $\hat{S}_f$ et calculer $h_2 = S_f \Delta x$, Δx étant choisi constant ou variable

iii) Calculer $H_2^{(2)} = H_1 - S_f \Delta x$

iv) Si $\left| H_2^{(1)} - H_2^{(2)} \right| < \varepsilon$ (tolérance), répéter la procédure pour le point suivant.

Sinon, se donner une autre valeur de y_2 et répéter les étapes i) ii) iii) iv).

Cette méthode est largement utilisée dans les situations réelles (Canaux non prismatiques, Rivières, ...).

Elle est préférée aux autres méthodes, à cause de la rapidité d'exécution qu'elle offre, en effet, souvent quelques itérations suffisent pour atteindre la convergence.

Autre méthode :

L'équation d'énergie écrite entre la station (1) et (2) est :

$$y_1 + z_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + z_1 + \alpha_1 \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$

$$\Rightarrow (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) + \frac{1}{2g}(\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2) = S_f \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta y + \Delta z + \Delta\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) = S_f \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta z = S_0 \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta y + \Delta\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)}{-S_0 + S_f} \quad *$$

Procédure : Se donner un pas $(\square x)_d$

i) Se donner y_{k+1} et calculer $\Delta\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right), S_f$

ii) Calculer $(\Delta x)_c$ par $*$

iii) Calculer $|(\Delta x)_c - (\Delta x)_d| \leq$ tolérance, répéter la procédure pour le point suivant. Sinon se donner une autre profondeur y_{k+1} et répéter les étapes i), ii) et iii).

7. Courbes de remous en cours d'eau naturel

Les méthodes indiquées précédemment pour déterminer les courbes de remous, supposent que les sections sont régulières et uniformes et par conséquent ne sont pas applicables aux cours d'eau naturels.

Dans ceux-ci, le calcul de telles courbes doit toujours être effectué en divisant le canal en tronçons élémentaires.

La division n'est pas arbitraire, au contraire, il faut choisir les tronçons de façon à pouvoir considérer pour chaque cours d'eau une valeur moyenne de la pente, de la section et du coefficient de rugosité.

- On considère que la pente moyenne d'un tronçon est égale à la pente moyenne du fond de ce tronçon.
- On peut admettre que la section moyenne dans un tronçon est la section placée au milieu de ce tronçon.
- Le choix du coefficient de rugosité moyen présente certaines difficultés. On peut le déterminer à partir de la profondeur du cours d'eau avec laquelle un débit connu s'écoule dans le tronçon, par application des formules du régime uniforme. Si ces données ne sont pas connues, on doit fixer le coefficient de rugosité à partir de la connaissance de la nature du lit en ne perdant jamais de vue que tout ce qui augmente la turbulence augmente les pertes

d'énergie.

8. Ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique se produit lorsqu'il y a un conflit entre l'amont et l'aval d'un écoulement pour passer d'un régime supercritique à un régime subcritique.

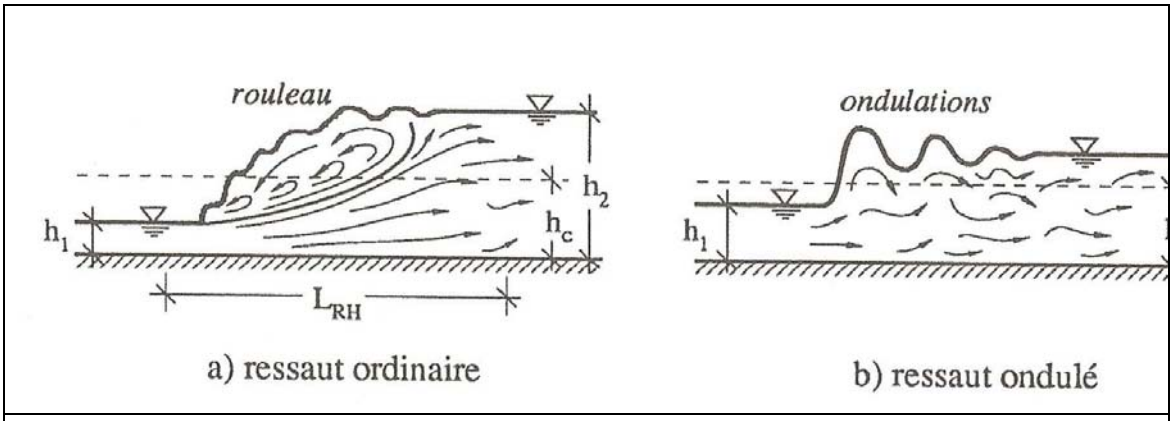

Figure 11. : Ressaut Hydraulique

Il peut aussi prendre place à l'interface de densité dans un écoulement stratifié accompagné par une turbulence importante et une dissipation d'énergie.

Dans les écoulements à surface libre, le ressaut hydraulique est utilisé pour:

- Dissiper de l'énergie dans les écoulements sous les barrages, les déversoirs et autres structures hydrauliques.
- Maintenir un haut niveau d'eau dans les canaux de distribution.
- Mixer des produits chimiques utilisés pour la purification ou traitement d'eau usée, etc...

Equation fondamentale

L'observation du phénomène du ressaut hydraulique justifie les hypothèses suivantes :

- Forces de frottement petites à cause de la courte longueur de la discontinuité
- Canal horizontal : les pentes des canaux sont assez petites, donc le poids du ressaut hydraulique est négligé.

Conservation de la quantité de mouvement.

$$\rho g y_{G_1} A_1 - \rho g y_{G_2} A_2 = \rho Q (V_2 - V_1)$$

Avec $$y_{G_i} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} y \, d A$$

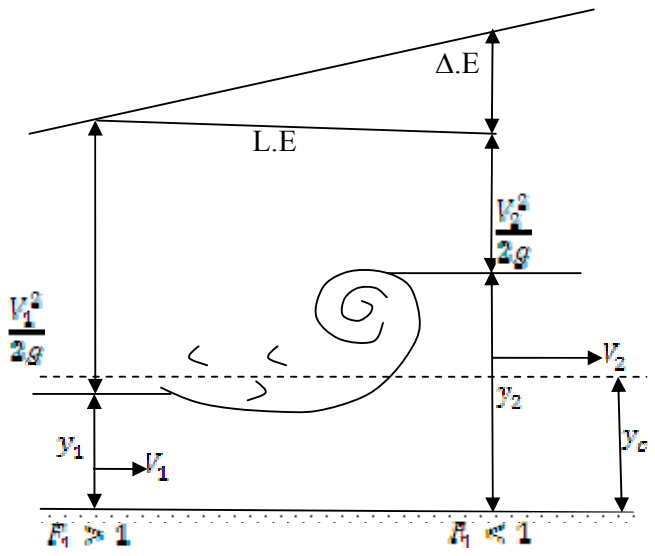

Figure 12. : Ressaut hydraulique (calcul)

$$\rho g y_{G_1} A_1 + \rho Q V_1 = \rho g y_{G_2} A_2 + \rho Q V_2$$

Où $\rho Q V_1 = M_i$ et $\rho g y_{G_i} A_i = F_i$

d'où $F_i + M_i = cte$ (fonction impulsion)

donc

$$\frac{Q^2}{gA} + A_{yG} = cte$$ (équation fondamentale du Ressaut hydraulique)

Cas particulier

Canal rectangulaire

$$A_1 = b\,y_1 \qquad y_{G_1} = y_1/2$$

L'équation s'écrit comme suit :

$$\frac{Q^2}{gby_1} + \frac{by_1^2}{2} = \frac{Q^2}{gby_2} + \frac{by_2^2}{2}$$

On pose $q = \frac{Q}{b}$ (débit par unité de largeur)

d'où on aura :

$$\frac{q^2}{gy_1} + \frac{y_1^2}{2} = \frac{q^2}{gy_2} + \frac{y_1^2}{2}$$

Ce qui donne :

$$\frac{q^2}{g} = y_1 \cdot y_2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Et

$$y_2 = \frac{y_1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{1+8q^2}}{gy_1^3}\right)$$

Finalement :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8F_1^2}-1\right)$$

plus connue sous le nom de formule de Bélanger

Equation des profondeurs conjuguées

Si F augmente, y augmente de manière parabolique

y1 et y2 sont dites profondeurs conjuguées.

Cette équation donne de bons résultats si la pente de fond est inférieure à 0.05 .

Pour les pentes plus fortes, l'effet de la composante gravitaire du ressaut doit être prise en compte.

Pour un canal rectangulaire la formule des profondeurs conjuguées s'écrit alors :

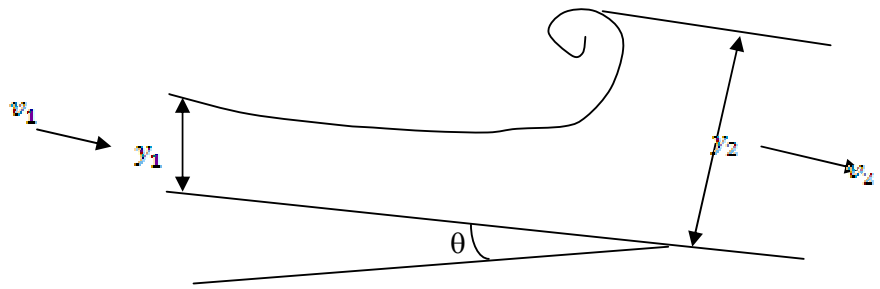

Figure 13. : Ressaut hydraulique (y_1, y_2)

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2\cos\theta}\left[\sqrt{1+\frac{8F_1^2\cos^3\theta}{1-2\delta\,\mathrm{tg}\phi}}-1\right]$$

☐ est un nombre sans dimension variant avec la pente du canal et représenté par le diagramme ci-après obtenu sur la base de résultats expérimentaux.

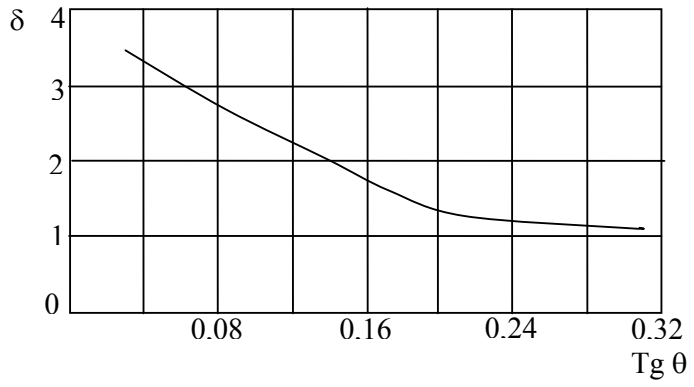

Figure 14. : Classification des Régimes d'écoulement

Longueur du ressaut hydraulique

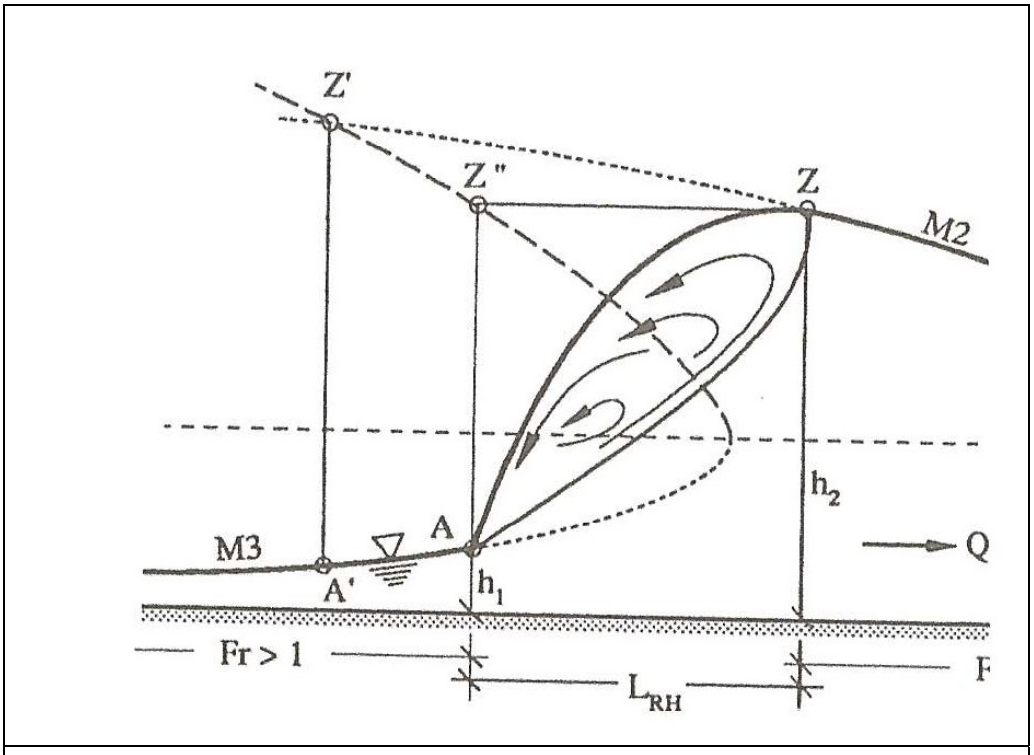

Figure 15. : Longueur et Position du Ressaut

Formules empiriques (Canal rectangulaire)

$$L = 5y_2$$

$$L = gy_1(F_1 - 1.57)$$

$$L = 6y_1\sqrt{\frac{y_1}{g}}$$ Shafferman

$$L = 6(y_2 - y_1)$$ Smetanaa

$$L = 6(y_2 - y_1)$$ Linkwist

Canal trapézoïdal

$$L = 8y_2\left(1 + 4\sqrt{\frac{B_2 - B_1}{B_1}}\right)$$ Hsing et posey

B_1 largeur supérieure amont

B_2 largeur supérieure aval

Bassin d'amortissement

C'est une structure pour dissiper l'énergie disponible d'écoulement dans un évacuateur de crue, une vidange de fond, ou une chute dans un canal.

Dans la majorité des structures hydrauliques, un ressaut hydraulique creé dans un bassin d'amortissement est utilisé comme dissipateur d'énergie.

On se limitera dans ce qui suit à un bassin rectangulaire horizontal, bien que dans la pratique on rencontre des pentes.

L'U.S BUREAU classifie le Ressaut hydraulique comme un dissipateur d'énergie efficace en fonction du nombre de Froude F1 à l'entrée du bassin.

Délimitation de F1

- $1 < F_1 < 1.7$

Onde stationnaire

Légère différence dans les profondeurs conjuguées

- $F_1 = 1.7$

Série de petits rouleaux se développe

- $1.7 < F_1 < 2.27$

Pré-Ressaut

Le profil est lisse, la vitesse est sensiblement uniforme et la perte de charge petite.

Donc aucun bloc de dissipation n'est exigé si on prend des longueurs appropriées.

- $2.25 < F_1 < 4.5$

Ressaut de transition

Action oscillatoire du jet, chaque oscillation produit une grande onde de période irrégulière qui traverse

l'aval sur une grande distance (des km) et qui peut endommager les bases en terre. Cette gamme du nombre de Froude est à éviter dans les bassins d'amortissement tant que celà est possible.

- $1 < F_1 < 1.7$

Bon ressaut hydraulique.

Bien équilibré.

Son action est la meilleure.

Absorption d'énergie varie de 45 à 70 %.

Les blocs peuvent être utilisés pour réduire la longueur du ressaut.

- $F_1 > 9$

Ressaut hydraulique efficace.

Dissipation d'énergie atteint 85 %.

Les bassins d'amortissement peuvent être économiques.

Remarques :

Les blocs utilisés sont régulièrement espacés.

Les seuils utilisés sont généralement de forme triangulaire.

Les bétons utilisés dans ces structures doivent être d'une grande qualité pour éviter les dégâts d'érosion et de cavitation.

Aucune irrégularité de surface ne doit être tolérée.

9. Etude de quelques exemples numériques

Cas d'un canal rectangulaire

Données :

Pente du canal	:	So
Largeur du canal	:	b
Coefficient de Manning	:	rc (n)
Débit transité	:	Q

Equation à résoudre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} = \frac{S_0 - S_f}{-\frac{Q^2 B}{g A^3} + 1}$$

$$S_f = \frac{n^2 Q^2 [P(y)]^{4/3}}{[A(y)]^{10/3}}$$

P (y) = b + 2y

A (y) = b y

S_o = 0.0004 Q = 10 $m^3/1$

rc = 0.016 b = 3.5 m

Résultats

yn = 2.296 m

yc = 0.94 m

type de profil : M2

<u>Méthodes de résolution</u>

Pas à pas h = 100 m

Runge Kutta d'ordre 4

10. Références bibliographiques

Aspects Hydrologiques, hydrauliques, logiciels

Vieux, B.E., 2004. Distributed Hydrologic Modeling using GIS. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Davie, T., 2008. Fundamentals of Hydrology, Second edition, Routledge, Taylor & Francis Group, 200p.

Ambroise, B., 1991. Hydrologie des petits bassins versants ruraux en milieu tempéré, processus et modèles. Séminaire du Conseil Scientifique du département « Science du Sol » de l'Institut National de Recherches Agronomiques de Dijon, 26-27 mars 1991.

Ambroise, B., 1999. La dynamique du cycle de l'eau dans un bassin versant. Processus, Facteurs, Modèles. Editions H.G.A., Bucarest.

Hydrologic Engineering Center. 2003. Geospatial Hydrologic Modeling Extension HEC- GeoHMS User's Manual Version 1.1. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Hydrologic Engineering Center. 2006. GageInterp A Program for Creating a Sequence of

HEC-DSS Grids from Time-Series Measurements Version 1.4. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Hydrologic Engineering Center. 2006. HEC Data Storage System Visual Utility Engine (DSSVue) User's Manual Version 1.2. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Hydrologic Engineering Center. 2008. Hydrologic Modeling System HEC-HMS User's Manual Version 3.2. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers.

Panigrahi, B.K., Harris, D.J., and C.S. Pathak, 2012. Hydrology and Hydraulics: Watershed Management and Flood Assessment, Short Course offered during 5th International Perspective on Water Resources & the Environment January 4-7, 2012, Marrakech, Morocco

Beven, K.J., 2002. Rainfall-Runoff Modelling The Primer, John Wiley & Sons Ltd, 359 p.

Singh V.P., 1995. Watershed modeling. In: Singh V.P., ed. Computer models of watershed
Davie, T. (2008) : FUNDAMENTALS OF HYDROLOGY, Second edition

Routledge Fundamentals of Physical Geography, Routledge Taylor and francis Group

Vieux, B.E., 2004. Distributed Hydrologic Modeling using GIS. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Singh, V.P. and Frevert, D.K., editors, 2002a. Mathematical Models of Large Watershed Hydrology. Water Resources Publications, Highlands Ranch, CO.

William A. Scharffenberg and Matthew J. Fleming (2010) : Hydrologic Modeling System HEC-HMS, User's Manual, Version 3.5 August 2010, US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center

Ancey, C. (2012) : Notes de cours Hydraulique à surface libre, version 4.2 du 2 mai 2012, Laboratoire hydraulique environnementale (LHE), École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Chow, V. T., 1959, Open-Channel Hydraulics , McGraw-Hill Book Company, New York, N. Y.

French, R. H., 1985, Open-Channel Hydraulics , McGraw-Hill Book Co., New York, NY.

Henderson, F.M., 1966, Open-Channel Flow , Macmillan Co., London, UK.

Abbott, M. B., 1979, Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free Surface Flows, Pitman, London.

Abbott, M. B., and Basco, D. R., 1990, Computational Fluid Dynamics, John Wiley, New York, NY.

Basco, D. R., 1983, Computation of Rapidly Varied, Unsteady Free-Surface Flow, U. S. Geological Survey Report WRI 83-4284.

Bell, S. W., Elliot, R. C., and Chaudhry, M. H., 1992, "Experimental results of two-dimensional dam-break flows," Jour. Hyd. Research, vol. 30, no. 2, pp.225-252.

Boussinesq, J., 1877, "Essais sur la theorie des eaux courantes," Memoires pre- sertes par divers Savants a l'Academie des Sciences de l'Institut de France, vol. 23, pp. 1-680; vol. 24, 1-64.

Chow, V. T., 1959, Open-Channel Hydraulics, McGraw-Hill, New York, NY. Cunge, J. A., Holly, F. M., and Verwey, A., 1980, Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Pitman, London.

DHI. MIKE 21 Flow Model: Hydrodynamic Module Scientific Documentation. MIKE by DHI, 2009.

Guide de laboratoire HEC-RAS (2009): Exemple pour la rivière du Loup, HEC-RAS Version 3.1.3, CTN-762 Ressources hydriques, Ecole supérieure de Technologie, Montréal,

Gary W. Brunner (2010) ; HEC-RAS River Analysis System, Hydraulic Reference Manual, Version 4.1, January 2010 Approved for Public Release. US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center

Ouazar, D. (2006) : Ecoulements en régime permanent et transitoire, Notes de cours, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat.

Ouazar, D. (2010) : Modèles numériques pour l'ingénieur, Notes de cours, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat

Ouazar, D. (2001) : Modélisation des problèmes d'hydrologie et d'hydraulique, Notes de cours, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat

Manuel d'utilisation du logiciel WMS, Aquaveo

Projets de fin d'études :

Bennajah, A., et E. Messka, 2011. Modélisation de Prévision des crues par utilisation de la Plateforme WMS, Cas d'étude Bassin de l'Ouergha, Mémoire de Projet de Fin d'Etudes, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V Agdal, Rabat

AIT ZEOUAY, H. 2011. Modélisation de prévision des crues par utilisation de la plateforme ATHYS, Cas d'étude Bassin de l'Ouergha, Mémoire de Projet de Fin d"Etudes, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V Agdal, Rabat

ESSADAOUI, M., 2012). Modélisation de Prévision des crues par utilisation de la Plateforme WMS, Cas d'étude Bassin de l'Ouergha, Mémoire de Projet de Fin d"Etudes, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V Agdal, Rabat

Sites internet

http://www.aquaveo.com/wms-intro

http://www.xmswiki.com/xms/WMS:Quick_Tour_-_Layout

http://www.xpsoftware.com/products/watershed-modeling-system-wms/

http://srtm.csi.cgiar.org